

## Elipsoida ziemiska

Justyna Chojnacka, Grzegorz Karwasz

Zakład Dydaktyki Fizyki,  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Artykuły popularnonaukowe, w tym w renomowanych czasopismach [1], określają kształt Ziemi jako „nieregularny kartofel”. Tymczasem różnice względne między dokładnym kształtem a elipsoidą są rzędu  $10^{-5}$  promienia Ziemi, natomiast elipsoidalne spłaszczenie wynosi  $1/298$ . Te same publikacje nie wyjaśniają, dlaczego elipsoida ziemiska ma takie rozmiary, a nie inne. Rozważania o kształcie Ziemi są dla nas pretekstem do przypomnienia lub wprowadzenia zagadnień z elektrostatyki i grawitacji, w tym pojęć takich jak powierzchnia ekwipotencjalna i gradient potencjału.

### Część I

#### Jakiego kształtu jest „kula” ziemiska?

Jakiego kształtu jest Ziemia? Odpowiedź znają wszyscy – oczywiście kulistego. W zasadzie jest ona nieco spłaszczona na biegunach, wskutek ruchu obrotowego. W rzeczywistości kształt Ziemi odbiega od elipsoidy i przypomina taki pognieciony kartofel [2], który nazywamy *geoidą*.

Podobnie jak w wielu innych problemach dydaktycznych odpowiedź jest nieco tautologiczna: kształt kuli ziemskiej to *ziemsko-kula*, czyli geoida. Nadal nie wiemy, ile wynosi spłaszczenie, dlaczego dokładnie tyle, na ile geoida różni się od elipsoidy i jaką rolę odgrywają łańcuchy górskie i rowy oceaniczne. W istocie, to nawet nie znamy zasady, jak taką *ziemsko-kulę* wyznaczyć.

Problem nie jest bynajmniej z geografii, ale z fizyki i to wcale niełatwy, co można zauważyć wertując książki z geodezji i z geofizyki, które to traktują problem w sposób lakoniczny – „kształt Ziemi to powierzchnia jednakowego potencjału siły ciężkości” [3]. O tym, że problem należy do nauk ścisłych wiedział już Kopernik, który zastanawiał się, dlaczego woda nie spływa z kuli ziemskiej. Od kulistości Ziemi i problemu wód zaczyna się jego *De revolutionibus*: „Także i wody morskie układają się do postaci kulistej, o czym wiedzą żeglarze, dostrzegając z wysokości masztu łądu stały, którego z pokładu okrętu jeszcze nie widać. [...] Wypadało tedy, aby mniej było wód niż łądu, by woda nie pochłonęła całej ziemi, skoro oba te elementy na skutek swej ciężkości dążą do tego samego środka. [...] jako łąd i woda wspierają się na jednym środku ciężkości Ziemi, który jest zarazem środkiem jej objętości. Woda, będąc lżejszą, wypełnia rozpadliny ziemskie i dlatego mało jest wody w stosunku do łądu, chociaż może na powierzchni więcej widać wody” [4].



Fot. 1. (Pozioma) powierzchnia morza jest prostopadła do murarskiego „pionu”. Kulka położona na poziomej płaszczyźnie pozostaje w spoczynku. Pion wskazuje kierunek wypadkowej siły grawitacji i odśrodkowej siły bezwładności, a poziomica powierzchnię stałego potencjału grawitacyjnego (linia brzegowa w tle to port w Gdańsku, a czarny lewy margines to pionowa futryna okna)

Podsumowując, Kopernik zagadnienie kulistości Ziemi łączy z problemem wody oblewającej lądy i ze środkiem ciężkości Ziemi. Intuicja, jak wykazemy dalej, genialna!

### Kłopoty z zegarem

Jak wiadomo, okres wahadła fizycznego zależy od wartości przyspieszenia ziemskiego, dlatego też precyzja zegarów była kluczowa w pomiarach  $g$ .

Już w średniowieczu budowano niezłe zegary. Takim jest zegar na Ratuszu w Pradze i taki jest w Kościele Mariackim w Gdańsku. W zegarach tych spadające wolno ciężarki napędzały system kół zębatach a poprzez nie wskazówki, figurki, kalendarz i resztę mechanizmów. Oczywiście, taki zegar nie mógł być idealnie dokładny.

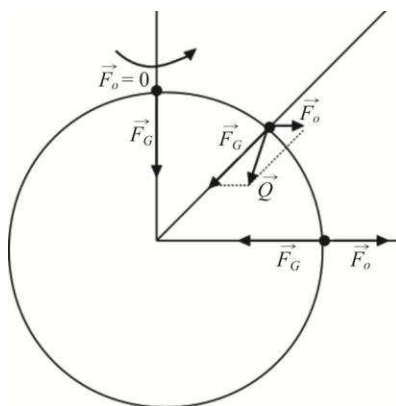


Fot. 2. Zegar astronomiczny z Pragi (1410/1490) i z Kościoła Mariackiego w Gdańsku (1470, Hans Düringer). Zegary budowane przed odkryciem przez Galileusza izochronizmu wahadła matematycznego dokładne być nie mogły. Zegar w Gdańsku zrekonstruowany dzięki długim staraniom prof. fizyki Politechniki Gdańskiej Andrzeja Januszajtisa

W katedrze w Pizie Galileusz liczył wahnięcia zwisającego z kopuły kandelabru. Tak podobno odkrył izochronizm wahadła. Droga do dokładnego zegara była otwarta! Lecz nie do końca. Należało jeszcze połączyć oba mechanizmy – ciężarków i wahadła. Pierwszy zegar tego typu zbudowali Anglicy, a Francuz (J. Richer, 1672) pokazał, że spóźnia się on na równiku o 2,5 minuty na dobę. W ten sposób stwierdzono doświadczalnie, o ile przyspieszenie ziemskie jest mniejsze na równiku niż na biegunie. Przyczyną jest oczywiście ruch obrotowy Ziemi i związane z nim przyspieszenie. Obliczenia jednak nie do końca się zgadzają.

Poprawka do przyspieszenia ziemskiego z powodu ruchu obrotowego Ziemi wynosi  $0,0337 \text{ m/s}^2$ . Tymczasem standardowe przyspieszenie ziemskie wynosi  $9,7803 \text{ m/s}^2$  na równiku i  $9,8322 \text{ m/s}^2$  na biegunie, co daje większą różnicę niż poprawka związana z siłą odśrodkową bezwładności. Zgodnie z wytłumaczeniem Europejskiej Agencji Kosmicznej ESA, mniejsze przyspieszenie grawitacyjne na równiku wynika z większej odległości punktów na równiku od środka Ziemi niż punktów na biegunie. To stwierdzenie nie wyjaśnia jednak elipsoidalnego kształtu Ziemi. Co więcej, gdyby klucz do wyjaśnienia kształtu Ziemi leżał w rozważaniach o wielkości wypadkowej siły działającej w różnych punktach globu, to można by wywnioskować, że z powodu mniejszej siły wypadkowej na równiku niż na biegunach Ziemia powinna ulec rozplaszczeniu, jak glina na szybko wirującym kole garncarskim. Kluczem do rozważań o kształcie Ziemi **nie jest** więc zagadnienie równowagi sił.

Wróćmy na chwilę do pewnego znanego schematu. Poniżej ilustracja zamieszczana w wielu podręcznikach fizyki i geografii.

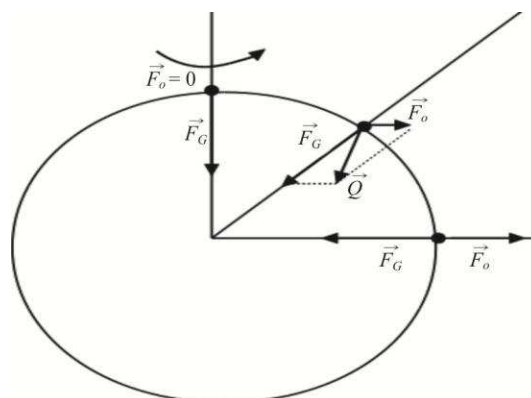


Rys. 3. Rozkład sił na obracającej się Ziemi. Wartość siły grawitacji  $\vec{F}_G$  na kulistej nieobracającej się Ziemi jest taka sama na równiku i na biegunach. Dodatkowo na masy poza biegunem działa siła odśrodkowa bezwładności (układ nieinercyjny)

Na powyższym rysunku siła odśrodkowa bezwładności  $\vec{F}_o$  jest wyołbrzymiona, ale nie z tego powodu rysunek jest błędny. Otóż zsumowanie (wektoro-

we) siły grawitacji  $\vec{F}_G$  i siły odśrodkowej bezwładności  $\vec{F}_o$  daje siłę  $\vec{Q}$ , która na rys. 3 **nie jest** prostopadła do powierzchni Ziemi. Siła  $\vec{Q}$  ma więc składową wzdłuż powierzchni Ziemi. Składowa ta powodowałaby ruch mas wody w kierunku równika, fale kilometrowej wysokości!

Mamy tu sytuację analogiczną z problemem ładunku elektrycznego na powierzchni przewodnika. Ładunek na powierzchni przewodnika może się swobodnie przemieszczać (taka jest definicja „przewodnika”). O ile rozkład ładunku na powierzchni przewodnika byłby taki, że wzdłuż powierzchni przewodnika istniałaby składowa wektora natężenia pola (innymi słowy, istniałaby siła elektryczna wzdłuż powierzchni), to ładunek elektryczny przemieszczałby się tak długo, aż nowy rozkład ładunku zniwelowałby to pole. Pole elektryczne na powierzchni przewodnika nie ma więc składowej stycznej. Właściwy rysunek dla „kuli” ziemskiej to rys. 4. Kula ziemiska musi być spłaszczona! Tylko wówczas wektor  $\vec{Q}$  jest w każdym punkcie Ziemi prostopadły do jej powierzchni. Można wykazać, że wówczas Ziemia jest elipsoidą. Na rys. 4 dokonaliśmy tego graficznie – rozciągając koło z rys. 3 w poziomie.



Rys. 4. Elipsoida obrotowa jest „idealną” powierzchnią Ziemi. Tylko w tym przypadku wektor siły  $\vec{Q}$  nie ma składowej stycznej do powierzchni Ziemi

Jak więc wyznaczyć tę elipsoidę metodą rozważań fizycznych? Wróćmy do elektrostatyki. Stwierdzenie, że rozkład ładunku na powierzchni jest taki, że nie wytwarza składowej stycznej pola można wyrazić też w inny sposób: powierzchnia przewodnika jest powierzchnią o **stałym potencjale** elektrycznym.

Kolejne etapy rozumowania wykraczają poza program szkoły średniej, choć nie przekraczają umiejętności wielu uczniów. Przytoczmy dobrze znane wzory na energię potencjalną  $E_p$  w polu grawitacyjnym (lub elektrostatycznym)

i na wartość siły grawitacji  $\vec{F}$ , pochodzące od masy punktowej (lub ładunku punktowego).

$$E_p = -GMm/r \quad (1)$$

i

$$F = GMm/r^2 \quad (2)$$

gdzie  $M$  jest masą ciała wytwarzającego pole grawitacyjne,  $m$  masą ciała umieszczonego w tym polu,  $G$  stałą grawitacji, a  $r$  – odległością od środka ciała wytwarzającego pole grawitacyjne.

Dwa wzory bardzo „podobne”. Kto zna rachunek różniczkowy od razu widzi, że siła jest pochodną energii potencjalnej po zmiennej  $r$  (ze znakiem minus).

$$F = -dE_p/dr \quad (3)$$

Rzeczywiście pochodną funkcji  $y = 1/x$  jest funkcja  $y' = -1/x^2$ . Zauważmy, że w równaniu (1) jest znak minus po prawej stronie: energia oddziaływania grawitacyjnego dwóch mas jest *ujemna* – masy się przyciągają, czyli siła działa w kierunku  $-r$ , energia rośnie w kierunku  $+r$  i (wynosi zero dla  $r = \infty$ ).

Mamy argument przemawiający za tym, że siła jest pochodną energii potencjalnej po przesunięciu (a natężenie pola pochodną potencjału). Jest nim wzór na pracę  $W$

$$W = Fs \quad (4)$$

gdzie  $s$  jest przesunięciem. Wzór to oczywiście bardzo, bardzo uproszczony. Co zrobić, jeśli siła nie jest stała? Trzeba wówczas mnożyć chwilową siłę przez fragment drogi, na jakim siła jest w miarę stała. Innymi słowy, należy *całkować* siłę wzdłuż małych odcinków drogi  $ds$ . Nieco lepszy wzór na pracę ma więc postać

$$W = \int F ds \quad (5)$$

(Ten nie spodobałby się i fizykom i matematykom, ale nam taka postać wystarczy). Całkowanie to operacja „odwrotna” do różniczkowania, czyli

$$F = dW/ds \quad (6)$$

a ponieważ wykonana praca  $W$  oznacza straconą energię, równania (3) i (6) są równoważne.

Aby zrozumieć, dlaczego Ziemia ma kształt elipsoidy, potrzebna jeszcze dygresja z kartografii. W którym kierunku płyną strumienie w górach? Oczywiście w dół, to znaczy w poprzek (prostopadle) do poziomicy. Co więcej, strumienie płyną tam, gdzie poziomice są ułożone najgęściej, zob. rys. 5. Rzeki płyną w kierunku gdzie jest największy spadek terenu.



Rys. 5. Aby się w górach nie zgęczyć, należy chodzić wzdłuż poziomicy. Wzdłuż poziomicy nie wznosimy się ani w górę ani w dół, nie zmienia się więc nasza *energia potencjalna*. Rzeki natomiast płyną w kierunku największego spadku – prostopadle do poziomicy i tam gdzie są one najgęściej ułożone (Courtesy: Wyd. Witanski)

Możemy podsumować nasze dotychczasowe rozważania. Między siłą a energią (lub analogicznie: między natężeniem pola a potencjałem) zachodzi następujący związek:

natężenie pola (dla pola grawitacyjnego nazywane też przyspieszeniem grawitacyjnym) jest prostopadle do powierzchni ekwipotencjalnych i jest zawsze zwrócone w stronę malejącego potencjału.

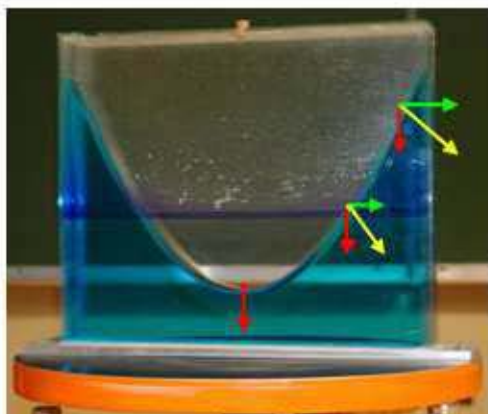
Przepiękny wzór znajdziemy np. w *Wykładach* R. Feynmana: natężenie pola  $E$  jest gradientem potencjału  $V$  (ze znakiem minus: natężenie pola ma kierunek *spadku* potencjału)

$$E = -\text{grad}V = -\nabla V \quad (7)$$

gdzie pogrubione  $E$  i pogrubiony operator **nabla** przypominają, że zamieniamy pole skalarne (czyli potencjał) na pole wektorowe (czyli natężenie pola).

W pokoju powierzchnią stałego potencjału grawitacyjnego (powierzchnią ekwipotencjalną) jest poziomo ustawiony stół. Kropla wody pozostaje na nim w równowadze, nie sływa.

Aby więc po „kuli ziemskiej” nie przelewały się kilometrowe fale, jej powierzchnia musi być powierzchnią *stałego potencjału grawitacyjnego*. Rozumiemy więc rys. 4 w nowy sposób: elipsoida jest powierzchnią ekwipotencjalną wypadkowego pola siły grawitacji i siły odśrodkowej bezwładności. Jak wygląda powierzchnia ekwipotencjalna w wirującym akwarium z wodą znajdującym się w stałym, pionowym polu grawitacyjnym pokazuje fot. 6.



Fot. 6. Na cząstki znajdujące się na powierzchni swobodnej w wirującym akwarium działa siła grawitacji i siła odśrodkowa bezwładności. Powierzchnia wody, w profilu parabola, jest w każdym punkcie prostopadła do wypadkowej tych dwóch sił. Powierzchnia wody jest powierzchnią ekwipotencjalną

Jakie rozmiary ma elipsoida będąca powierzchnią ekwipotencjalną na wirującej kuli o rozmiarach i masie Ziemi wyliczymy w drugiej części artykułu.

#### Literatura

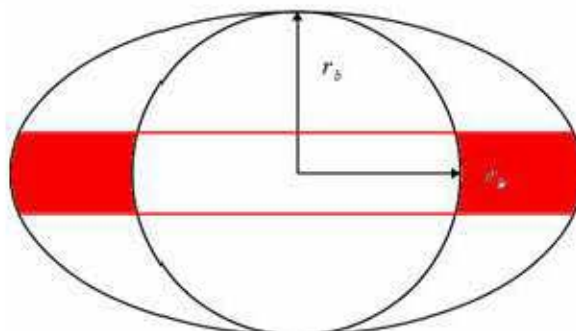
- [1] Davide Castelvecchi, *The Geoid: Why a map of Earth's gravity yields a potato-shaped planet*, *Scientific American*, 01.04.2011 <http://blogs.scientificamerican.com/observations/2011/04/01/the-geoid-why-a-map-of-earths-gravity-yields-a-potato-shaped-planet/>
- [2] W. Niedzicki, *Geoida*, *Ambernet*, <http://www.ambernet.pl/Filmy.php#Geoida>, zob. też: [http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Physics\\_is\\_fun/movies/geoidal.mpg](http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Physics_is_fun/movies/geoidal.mpg)
- [3] R. Dmowska, *Fizyka skorupy i wnętrza Ziemi*, w: *Encyklopedia Fizyki Współczesnej*, PWN, Warszawa 1973, s. 815
- [4] M. Kopernik, *O obrotach ciał niebieskich*, tłum. L.A. Birkenmajer, Wydawnictwo Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 2004, Księga pierwsza, s. 35–40

## Część II

### Elipsoida ziemska

Na rozważaniach o powierzchniach ekwipotencjalnych i gradientach pola grawitacyjnego problemy z powierzchnią Ziemi dopiero się zaczynają. Potrafimy obliczyć powierzchnie ekwipotencjalne dla ładunku (lub masy) punktowej lub masy kulistej: są to po prostu powierzchnie sferyczne. A jak jest w przypadku elipsoidy? Dokładne rozwiązanie wymaga złożonych metod matematycznych, ale daje się modelowo uprościć.

Czym jest elipsoida? Widziana z bieguna jest to kula o promieniu biegunowym  $r_b$ , z dodatkową masą skupioną głównie w strefie równikowej (rys. 1).



Rys. 1. Elipsoidę, w dużym przybliżeniu, ale akceptowalnym dla obliczenia potencjału, możemy uważać za kulę o promieniu biegunowym  $r_b$ , z dodatkową masą w postaci pierścienia dookoła równika

Potencjał jest wielkością addytywną, możemy więc potencjał grawitacyjny na biegunie obliczyć jako sumę potencjału pochodzącego od kuli o promieniu  $r_b$  i potencjału pierścienia o masie wynikającej z różnicy mas elipsoidy i kuli o promieniu  $r_b$ .

Z danych geograficznych znamy promień biegunowy i równikowy Ziemi (ten ostatni większy o 21 km) oraz średnią gęstość Ziemi\* –  $5,515 \text{ g/cm}^3$  (taką gęstość, pośrednią między gęstością żelaza a gęstością granitu, ma na przykład minerał piryt  $\text{FeS}_2$ ). W obliczeniach przyjmujemy 5–6 cyfr znaczących, z przyczyn, które będą jasne na końcu artykułu). Oto dane wyjściowe:

$$r_r = 6,378245 \cdot 10^6 \text{ m} - \text{promień równikowy Ziemi,}$$

$$r_b = 6,356752 \cdot 10^6 \text{ m} - \text{promień biegunowy Ziemi,}$$

$$\rho_Z = 5,515 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - \text{średnia gęstość Ziemi,}$$

$$M_Z = 5,9742 \cdot 10^{24} - \text{masa Ziemi (dla sprawdzenia poprawności rachunków),}$$

$$G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} - \text{stała grawitacji.}$$

1. Potencjał grawitacyjny dwóch kul o promieniach równych promieniowi biegunowemu albo równikowemu, odpowiednio,  $r_b$  albo  $r_r$ .

\* Nie znamy dokładnych gęstości zewnętrznych warstw Ziemi (na pewno więcej niż  $3 \text{ g/cm}^3$ ). W zerowym przybliżeniu przyjmujemy średnią gęstość Ziemi ( $5,5 \text{ g/cm}^3$ ), co daje poprawkę nieco za dużą. Dopiero przyjęcie mniejszej gęstości zewnętrznych warstw Ziemi, mniej więcej jak prawdopodobna gęstość płaszczka ( $3,3\text{--}3,6 \text{ g/cm}^3$ ) poprawia zgodność obliczonej powierzchni ekwipotencjalnej z rzeczywistymi rozmiarami elipsoidy ziemskiej.



a) Potencjał grawitacyjny kuli o promieniu równym  $r_b$ :

$$V_b = -\frac{G \cdot M_Z}{r_b} \quad (1)$$

Masę Ziemi wyznaczamy przekształcając wzór  $\rho_Z = \frac{M_Z}{V} \Rightarrow M_Z = \rho_Z \cdot V$ .

W miejsce  $V$  podstawiamy  $V = \frac{4}{3}\pi r_b^3$  (objętość kuli), stąd otrzymujemy, że

$$M_Z = \rho_Z \cdot \frac{4}{3}\pi r_b^3$$

i porządkując wzór (1) dostajemy, że

$$V_b = -\frac{4}{3}G \cdot \rho_Z \cdot \pi \cdot r_b^2. \quad (2)$$

Jest to ważny wynik: im większy promień kuli, tym (przy tej samej gęstości) większy potencjał na jej powierzchni (chodzi o wartość bezwzględną).

Podstawiając odpowiednie dane liczbowe otrzymujemy wartość potencjału grawitacyjnego kuli o promieniu równym promieniowi biegunowemu Ziemi:

$$V_b = -6,22715 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

b) Potencjał grawitacyjny kuli o promieniu równym  $r_r$ :

Korzystając ze wzoru (2) na potencjał grawitacyjny, zastępując w nim  $r_b$  promieniem równikowym  $r_r$ , a także podstawiając pozostałe dane liczbowe otrzymujemy wartość potencjału dla kuli o promieniu  $r_r$ :

$$V_r = -6,26933 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Potencjał na równiku w tym oszacowaniu byłby większy (w liczbach bezwzględnych) niż na biegunie. Ale powoli...

## 2. Wkład potencjału siły odśrodkowej bezwładności do potencjału grawitacyjnego Ziemi.

Przemierzając się wzdłuż promienia na wirującej tarczy (lub kuli) przewyciężyć musimy siłę odśrodkową (o ile poruszamy się w kierunku centrum). Przemierzając się więc, wykonujemy pracę. W przypadku pola grawitacyjnego z wykonaną pracą (czyli ze zmianą energii potencjalnej) kojarzymy potencjał grawitacyjny. Przez analogię, sile odśrodkowej przypisać możemy stosowny potencjał, który umownie nazwiemy potencjałem siły odśrodkowej (pojawia się on np. w teorii zderzeń). Bez tego potencjału wyliczona powierzchnia elipsoidy

nie uwzględniałyby efektów związanych z obrotem Ziemi. Aby wyznaczyć potencjał siły odśrodkowej skorzystamy ze wzoru (3) z części I artykułu.

Przyspieszenie odśrodkowe siły bezwładności ma wartość

$$a = \omega^2 R, \quad (3)$$

gdzie  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  jest prędkością kątową, a  $R$  jest odległością od osi obrotu.

Potencjał siły odśrodkowej<sup>1</sup> wynosi więc:

$$V_o = -\frac{1}{2}\omega^2 R^2 \quad (4)$$

tak, aby pochodna potencjału po zmiennej  $R$  wzięta ze znakiem minus była równa przyspieszeniu odśrodkowemu  $a$ .

Dla Ziemi  $T = 23$  h 56 min (nie 24 h!) stąd:  $\omega = 7,28877 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Podstawiając do wzoru na  $V_o$  pozostałe dane liczbowe dostajemy wartość potencjału siły odśrodkowej, która wpływa na końcową wartość potencjału grawitacyjnego:

$$V_o = -0,10806 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

3. Pozostają do policzenia poprawki elipsoidalne. Potencjał pochodzący od pierścienia nie jest trudny do policzenia. Wszystkie elementy pierścienia równikowego znajdują się w tej samej odległości od bieguna, równej  $\sqrt{r_b^2 + r_r^2}$ , wzór (1) przyjmuje więc postać (5)

a) Poprawka elipsoidalna na biegunie (do potencjału dla kuli o promieniu  $r_b$ ) wynosi

$$V_{pb} = -G \cdot \frac{M_P}{(r_r^2 + r_b^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

gdzie:

$V_{pb}$  – potencjał pierścienia powstałego wokół kuli o promieniu  $r_b$ ,

$M_P$  – masa pierścienia.

Masę pierścienia obliczymy odejmując od masy Ziemi – elipsoidy, masę Ziemi – kuli o promieniu równym promieniowi biegunowemu. Stąd

<sup>1</sup> Uważny czytelnik zauważy, że obliczany potencjał „siły dośrodkowej” przemnożony przez masę poruszającego się ciała jest, co do wartości bezwzględnej, równoważny energii kinetycznej tego ciała  $\frac{1}{2}mv^2$ .

$$M_p = \underbrace{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_r^2 \cdot r_b}_{\text{masa Ziemi-eliipsoida}} - \underbrace{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \pi r_b^3}_{\text{masa Ziemi-kuli}}$$

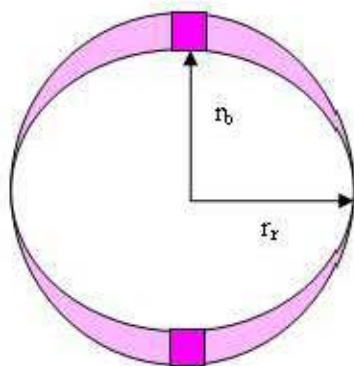
otrzymujemy  $M_p = 4,017678 \cdot 10^{22}$  kg, czyli mniej niż 1% masy całej Ziemi. Podstawiając masę pierścienia do wzoru (5) wyznaczamy wartość poprawki do potencjału

$$V_{pb} = -0,29778 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Uwzględniając tę elipsoidalną poprawkę otrzymujemy wartość potencjału Ziemi na biegunie:

$$V_{b,\varepsilon} = \underbrace{-6,22715 \cdot 10^7}_{V_0} - \underbrace{0,29778 \cdot 10^6}_{V_{pb}} = -6,25693 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

- b) Potencjał pierścienia (poprawka elipsoidalna na brakujące\* cząstki biegunowe, zob. rys. 2) dla kuli o promieniu  $r_r$ .



Rys. 2. Elipsoida widziana z równika, to kula o promieniu równikowym  $r_r$ , od której odjęto dwie cząstki nad biegunami. Brakujące cząstki zastępujemy w obliczeniach równoważnymi ujemnymi masami umieszczonymi na biegunach

\* Stosujemy takie przybliżenie przez analogię z elektrostatyką. Jeśli jakieś ciało jest w swej objętości jednorodnie naładowane elektrycznie, a pewna jego część jest elektrycznie obojętna, to możemy obliczyć potencjał wywołany takim ładunkiem przyjmując, że całe ciało jest naładowane, po czym odjąć przyczynę od części nienaładowanej zakładając, że dodatkowo ta część jest naładowana przeciwnie. Brakująca masa na cząstkach biegunowych elipsoidy, w porównaniu do kuli o promieniu równikowym (czyli większym niż biegunowy) to jakby „ujemna” masa tych cząstek.

$$V_{pr} = G \frac{M_p}{(r_r^2 + r_b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Masę tego\* pierścienia obliczamy odejmując od masy kuli o promieniu  $r_r$  masę Ziemi – elipsoidy:  $M_p = \frac{4}{3}\pi \cdot \rho_Z(r_r^3 - r_r^2 r_b) = 2,019042 \cdot 10^{22}$  kg. Zauważmy, że masa czasz biegunowych jest dwa razy mniejsza niż pierścienia równikowego.

Obliczając potencjał równoważnego pierścienia otrzymujemy poprawkę

$$V_{pr} = +0,14965 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Znak „+” oznacza, że poprawkę *odjęliśmy* od potencjału kuli o promieniu  $r_r$  – w analogii z potencjałem elektrostatycznym brakującą masę na czaszach biegunowych traktujemy jak ładunek elektryczny przeciwnego znaku. Potencjał *grawitacyjny*  $V_{r,g}$  (nie uwzględniający potencjału odśrodkowego) wynosi więc na równiku

$$V_{r,g} = \underbrace{-6,269332 \cdot 10^7}_{V_r} + \underbrace{0,014965 \cdot 10^7}_{V_{pr}} = -6,254367 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Uwzględniając dodatkowo potencjał odśrodkowy dostajemy, że całkowity potencjał grawitacyjny  $V_r$  punktów na powierzchni Ziemi–elipsoidy wynosi na równiku:

$$V_r = \underbrace{-6,254367 \cdot 10^7}_{V_{r,g}} - \underbrace{0,010806 \cdot 10^7}_{V_o} = -6,26517 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Potencjał grawitacyjny na biegunie i na równiku są w takim oszacowaniu równe z dokładnością do 0,13%. Powierzchnia wirującej i spłaszczonej na biegunach Ziemi jest więc powierzchnią ekwipotencjalną!

Można potencjały na równiku i biegunie oszacować dokładniej, ale należałoby tego dokonać nie za pomocą zgrubnych przybliżeń, ale korzystając z metod rachunku całkowego a ponadto trzeba znać z większą dokładnością gęstość różnych warstw Ziemi.

Obliczone wartości potencjałów  $V_b$ ,  $V_{r,g}$  oraz  $V_o$  (i doświadczalne wartości  $r_r$  i  $r_b$ ) poprzez cytowany już kilkakrotnie wzór (3) pozwalają w prosty sposób<sup>2</sup>

\* Jest to inny pierścień, niż omawiany wcześniej na s. 42; ten jest „biegunowy”.

<sup>2</sup> Z ogólnego wzoru (3) i wzorów na potencjały grawitacyjny i odśrodkowy dedukujemy, że  $a_b = V_b/r_b$ , a  $a_r = V_{r,g}/r_r + 2V_o/r_r$ , na biegunie i równiku, odpowiednio.

obliczyć przyspieszenie ziemskie na równiku i biegunie. Wartości tak obliczone wynoszą  $9,772 \text{ m/s}^2$  i  $9,843 \text{ m/s}^2$ , odpowiednio, w niezłej zgodności z wartościami doświadczalnymi cytowanymi na początku artykułu.

Podsumowując, idealny kształt Ziemi odbiega od rzeczywistego ukształtowania. Idealna powierzchnia Ziemi to taka, jaką przybrałoby morze całkowicie ją oblewające – powierzchnia morza jest w każdym punkcie ekwipotencjalna, „pozioma”, a innymi słowy, prostopadła do sumy siły grawitacji i odśrodkowej siły bezwładności. Środek Ziemi to nie jej środek geometryczny, ale punkt, do którego zbiegają się wszystkie „piony” murarskie zawieszane w różnych miejscach na powierzchni Ziemi. Jak pisał Kopernik – jest to środek ciężkości Ziemi.

Przyspieszenie grawitacyjne to pochodna potencjału wzdłuż promienia – jeśli więc powierzchnia ekwipotencjalna przebiega dalej od „środku” Ziemi, to przyspieszenie grawitacyjne jest tam *mniejsze*, jak to ma miejsce na równiku. Przedstawione obliczenie poprawki do powierzchni ekwipotencjalnej wynikającej z ruchu obrotowego Ziemi i jej spłaszczenia jest dydaktycznie inspirujące, choć podręczniki tego tematu unikają.

Dodatkowe, lokalne poprawki dla ustalenia *referencyjnego*, grawitacyjnego kształtu Ziemi (czyli kształtu *geoidy*) wynikają z lokalnych różnic w gęstości płaszcza. Większa gęstość skał daje większą *bezwzględną* wartość potencjału na powierzchni. Z kolei, ponad powierzchnią Ziemi wartość bezwzględna potencjału zmniejsza się z wysokością. Nad skałami ciężkimi powierzchnie ekwipotencjalne przebiegają więc wyżej (dalej od środka Ziemi) niż nad skałami lekkimi. Europejska Agencja Kosmiczna (ESA) stwierdza: „nad podmorską górą morze wybrzusza się ku górze”.

Doświadczalne wyznaczenie referencyjnej powierzchni Ziemi nie jest bynajmniej proste: należy mierzyć siłę grawitacji w pobliżu powierzchni Ziemi i wyznaczyć z tych pomiarów kształt powierzchni ekwipotencjalnej. Uczynił to ostatnio czuły satelita GOCE należący do ESA, latający na małej wysokości (150 km) i używający do korekty trajektorii silników na strumieniu jonów ksenonowych. Potwierdził on niewielkie odchylenia od powierzchni elipsoidy rzędu  $-100 \text{ m}$ ,  $+80 \text{ m}$ , w rejonie Oceanu Indyjskiego i Islandii, odpowiednio. Paradoksalnie, w rejonie Himalajów powierzchnia referencyjna geoidy przebiega *pod* powierzchnią elipsoidy: najwyższe góry świata to dryfująca krawędź lekkich skał.

P.S. Ogólnie, pomiary siły ciężkości potrafimy przeprowadzić z dokładnością do 8 cyfr znaczących. Oddziaływanie grawitacyjne Księżyca (i Słońca) daje, po przeciwległych stronach równika, różnice odpowiadające zmianie poziomu powierzchni ekwipotencjalnej rzędu kilku metrów, jak to obrazują przyplawy

morza<sup>3</sup>. Na ósmą cyfrę znaczącą lokalnej siły grawitacji ma wpływ rozmieszczenie wieżowców w otoczeniu badanego punktu, zob. [1].

Rozważania o Ziemi oblanej morzami i powierzchniach ekwipotencjalnych wyjaśniają nie tylko spóźnianie się zegarów na równiku i elipsoidalny kształt naszego globu, ale potwierdzają ruch obrotowy Ziemi.



Fot. 1. Wbrew rozpowszechnionym, a niepełnym cytowaniom, napis na pomniku w Toruniu głosi „Ruszył Ziemię, wstrzymał Słońce i niebo”. To właśnie wirujące niebo, „którego rozmiarów nie znamy, a być może znac nie możemy” [4], niepokoiło Mikołaja Kopernika pięćset lat temu (powstanie *Komentarza* jest datowane gdzieś między rokiem 1510 a 1514)

### Podziękowania

Autorzy dziękują panu redaktorowi Witoldowi Zawadzkiemu za wnikliwą lekturę rękopisu i cenne uwagi.

### Literatura

- [1] Europejska Agencja Kosmiczna, [http://www.esa.int/images/C2\\_gravity\\_crop.jpg](http://www.esa.int/images/C2_gravity_crop.jpg)
- [2] R.H. Steward, Introduction to Physical Oceanography, [http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng\\_textbook/chapter17/chapter17\\_04.htm](http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter17/chapter17_04.htm)
- [3] Irving Michelson, *Tides' Tortured Theory*, Bulletin of the Atomic Scientists, March 1974, zob. <http://books.google.com>
- [4] M. Kopernik, *O obrotach ciał niebieskich*, tłum. L.A. Birkenmajer, Wydawnictwo Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 2004

<sup>3</sup> Amplituda pływów oceanicznych określona z potencjału grawitacyjnego i potencjału dośrodkowego jest rzędu metrów, więcej niż rzeczywiste pływy na otwartym oceanie. Decydujący wpływ na wielkość pływów mają zjawiska *mechaniki cieczy* [2].

Zagadnienia pływów oceanicznych próbowali rozwiązywać najwybitniejsi uczeni od Sir Newtona przez Markiza de Laplace'a do Lorda Kelvina [3], a nawet wielki polski matematyk i filozof epoki romantyzmu Józef Maria Hoene Wroński. Żadnemu z nich tak do końca się to nie udało, więc my nie będziemy się tego nawet podejmować...