1.7. Łódka

Z miasta A do miasta B pod prąd rzeki płynie prostoliniowym torem łódka i wraca do miasta A. Prędkość łódki v względem wody w obu przypadkach jest równa 4 km/h, a prędkość prądu rzeki wynosi 1,6 km/h. Oblicz stosunek czasu potrzebnego na przepłynięcie łódki z miasta A do miasta B i z powrotem do czasu potrzebnego na przepłynięcie tej samej odległości po jeziorze.

Podpowiedź 1: Wypisz dane, które znamy z zadania.

ROZWIĄZANIE

$v = 4\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ – prędkość łódki względem wody,

$r = 1{,}6\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ – prędkość prądu rzeki,

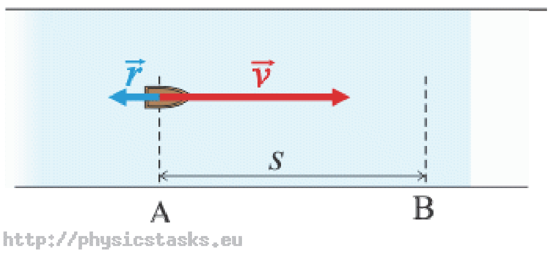
t – czas potrzebny na przepłynięcie z miasta A do B i z powrotem,

t' – czas potrzebny na przepłynięcie tej samej odległości po jeziorze,

$t/t' = ?$

Podpowiedź 2a: Prędkość, z jaką płynie łódka z miasta A do miasta B. Wykonaj rysunek pokazujący ruch łódki i zaznacz na nim obie prędkości, czyli prędkość łódki względem rzeki i prędkość prądu w rzece. Wyznacz prędkość łódki względem brzegu. Zastanów się, w jakim czasie łódka pokona odległość między miastami A i B.

ROZWIĄZANIE



Zakładamy, że odległość między miastami A i B wynosi *s* km. Prędkość łódki względem brzegu można obliczyć jako różnicę prędkości łódki względem wody i prędkości prądu rzeki:

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v} - r.$$

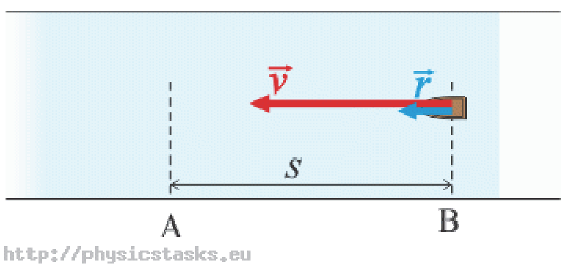
Łódka pokona odległość s w czasie:

$$t_1 = \frac{s}{\mathrm{v}_1} = \frac{s}{\mathrm{v} - r}.$$

Podpowiedź 2b: Prędkość, z jaką łódka płynie z miasta B do miasta A.

Wykonaj rysunek pokazujący ruch łódki z miasta B do miasta A i zaznacz prędkość łódki względem rzeki oraz prędkość nurtu rzeki. Wyznacz prędkość łódki względem brzegu. Następnie wyznacz czas, w którym łódka przepłynie odległość między miastami B i A.

ROZWIĄZANIE



Prędkość łódki względem brzegu jest sumą prędkości łódki względem rzeki i prędkości prądu rzeki:

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v} + r.$$

Tym razem łódka przepłynie odległość *s* w czasie równym:

$$t_2 = \frac{s}{\mathrm{v}_2} = \frac{s}{\mathrm{v} + r}.$$

Możemy wyznaczyć więc czas potrzebny na pokonanie odległości z miasta A do B i z powrotem:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{\mathrm{v} - r} + \frac{s}{\mathrm{v} + r} = s\left(\frac{1}{\mathrm{v} - r} + \frac{1}{\mathrm{v} + r}\right) = \frac{2\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2 - r^2}\, s.$$

Podpowiedź 3: Wyznaczenie czasu. Wyznacz czas potrzebny na przepłynięcie przez łódkę odległości 2AB *z prędkością* v.

ROZWIĄZANIE

Na jeziorze łódka przepłynie odległość 2*s* z prędkością v w czasie:

$$t' = \frac{s}{\mathrm{v}} + \frac{s}{\mathrm{v}} = \frac{2s}{\mathrm{v}}.$$

Stosunek czasu potrzebnego przepłynięcia odległości 2*s* po rzece i na jeziorze:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2 - r^2}\, s}{\frac{2s}{\mathrm{v}}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{v}^2 - r^2} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\mathrm{v}^2}}.$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$\frac{t}{t'} = \frac{4^2}{4^2 - 1{,}6^2} = \frac{16}{13{,}44} = 1{,}19.$$

<u>Odpowiedź</u>

Stosunek czasu potrzebnego na przepłynięcie odległości 2AB na rzece i po jeziorze jest równy:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2 - r^2}\, s}{\frac{2s}{\mathrm{v}}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{v}^2 - r^2} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\mathrm{v}^2}} = 1{,}19.$$

Uwaga: Mimo że wydaje się, że łódka płynąc po rzece raz z prądem raz pod prąd, nie powinna tracić na czasie przepłynięcia, podróż po rzece zajmuje więcej czasu niż przepłynięcie tej samej odległości tam i z powrotem po jeziorze. Wynik liczbowy jest niezwykle ciekawy: ten sam czynnik, $1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}$, *gdzie c jest prędkością światła, występuje w skróceniu odległości (i wydłużeniu czasu) w szczególnej teorii względności Einsteina.*