

Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Podstawy robotyki - laboratorium

Ćwiczenie 2 Przesunięcia oraz obroty układów współrzędnych

Opracowali:

mgr inż. Rafał Szczepański

dr Sławomir Mandra



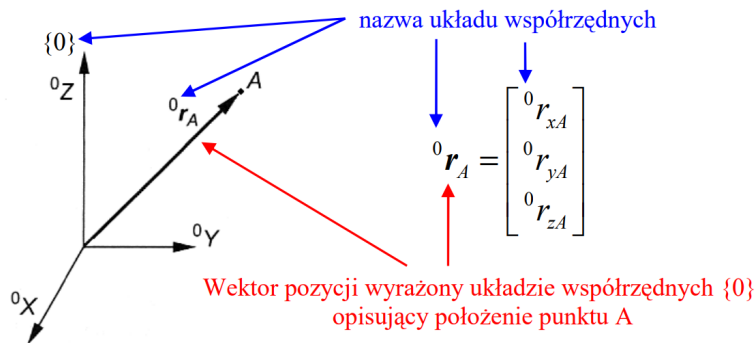
Toruń, 2020r.

Cel

Celem niniejszego ćwiczenia jest poznanie macierzy obrotu umożliwiającą zmianę orientacji układów współrzędnych. Wiedza ta pozwoli zrozumieć skomplikowany proces poruszania końcówką technologiczną wieloosiowego robota przemysłowego w nieruchomym globalnym układzie współrzędnych.

Wstęp teoretyczny

Przyjmijmy, że gdzieś w przestrzeni umieszczony jest nieruchomy globalny układ współrzędnych. Globalny układ współrzędnych jest najczęściej związany z podstawą manipulatora. Pozycje i orientacje obiektów można opisać względem globalnego (podstawowego) układu współrzędnych lub względem innych kartezjańskich układów współrzędnych. Układy współrzędnych przypisane do obiektów są najczęściej prawoskrętnymi kartezjańskimi układami współrzędnych prostokątnych. Notacja stosowania przy opisie układów współrzędnych została przedstawiona na rys. 1.



Rysunek 1: Wektor pozycji w układzie współrzędnych $\{0\}$

Przesunięcia układów współrzędnych

Opis dowolnie wybranego punktu A w dwóch układach współrzędnych kartezjańskich $\{0\}$ i $\{1\}$, których osie są wzajemnie równoległe, przedstawiono na rys. 2a. Układ $\{1\}$ otrzymano przez przesunięcie układu $\{0\}$ o wektor ${}^0\mathbf{p}_{0,1}$. Położenie punktu A w układzie $\{0\}$ jest opisane za pomocą wektora ${}^0\mathbf{r}_A$, a w układzie $\{1\}$ za pomocą wektora ${}^1\mathbf{r}_A$. Wektory te połączone są następującą zależnością:

$$\begin{bmatrix} {}^0r_{xA} \\ {}^0r_{yA} \\ {}^0r_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0p_{x0,1} \\ {}^0p_{y0,1} \\ {}^0p_{z0,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1r_{xA} \\ {}^1r_{yA} \\ {}^1r_{zA} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dalej równość ta będzie zapisywana w zwartej postaci

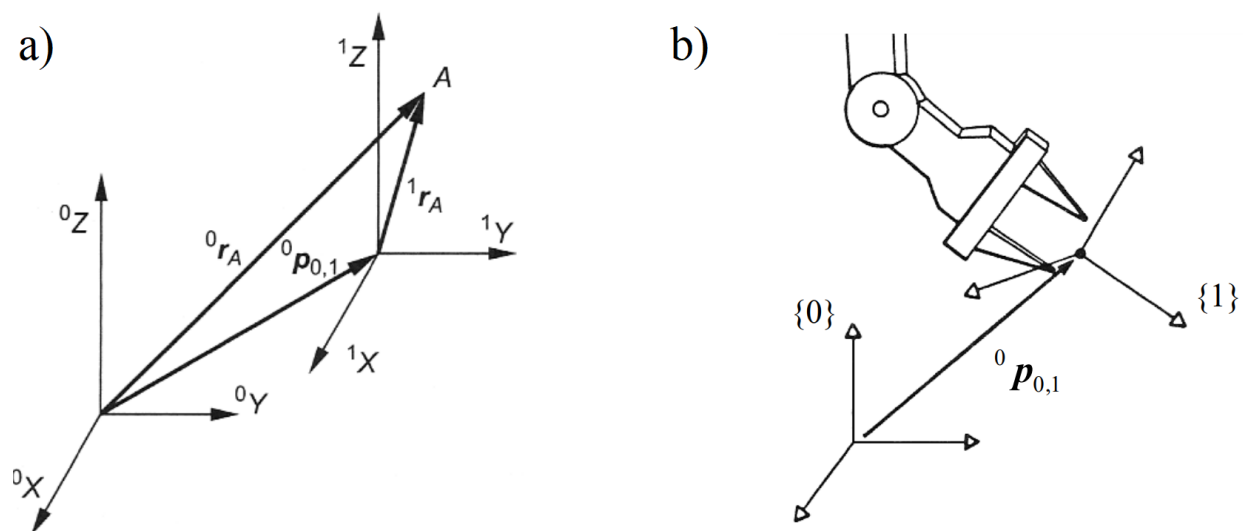
$${}^0\mathbf{r}_A = {}^0\mathbf{p}_{0,1} + {}^1\mathbf{r}_A \quad (2)$$

Obroty układów współrzędnych

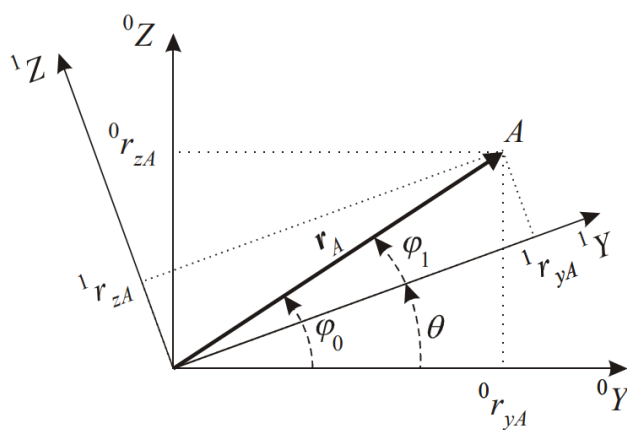
W celu opisu orientacji ciała wiążemy z nim układ współrzędnych, a następnie opisujemy orientację tego układu współrzędnych względem układu odniesienia. Układ współrzędnych $\{1\}$, związany z ciałem (rys. 2b) jest przesunięty i obrócony względem układu $\{0\}$. W celu znalezienia orientacji układu $\{1\}$ względem układu $\{0\}$ należy początki układów umieścić w tym samym punkcie.

Obroty podstawowe

Jeżeli układ współrzędnych $\{1\}$ otrzymano przez obrót układu podstawowego $\{0\}$ wokół jednej z jego osi, to taki obrót nazywany jest podstawowym, a odpowiadające mu przekształcenie obrotem podstawowym. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ występują trzy możliwości takich obrotów. Pierwszy z nich, obrót wokół osi X, przedstawiono na rys. 3. Punkt A może być opisany za pomocą



Rysunek 2: a) przesunięcie równoległe układów; b) usytuowanie obiektu co do pozycji i orientacji



Rysunek 3: Obrót układu $\{0\}$ wokół osi 0X o kąt θ - osie ${}^0X, {}^1X$ pokrywają się, są prostopadłe do rysunku i skierowane do czytelnika

wektora 0r_A lub 1r_A odpowiednio w układzie $\{0\}$ lub $\{1\}$.

$${}^0r_A \begin{bmatrix} {}^0r_{xA} \\ {}^0r_{yA} \\ {}^0r_{zA} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^1\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} {}^1r_{xA} \\ {}^1r_{yA} \\ {}^1r_{zA} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Niech $r_{YZ} = \sqrt{{}^0r_{yA}^2 + {}^0r_{zA}^2} = \sqrt{{}^1r_{yA}^2 + {}^1r_{zA}^2}$. Na podstawie rys. 3 można wyprowadzić zależności między składowymi tych wektorów:

$${}^0r_{xA} = {}^1r_{xA}$$

$${}^0r_{yA} = r_{YZ}\cos\phi_0 = r_{YZ}\cos(\phi_1 + \theta) = r_{YZ}\cos\phi_1\cos\theta - r_{YZ}\sin\phi_1\sin\theta$$

$${}^0r_{zA} = r_{YZ}\sin\phi_0 = r_{YZ}\sin(\phi_1 + \theta) = r_{YZ}\sin\phi_1\cos\theta + r_{YZ}\cos\phi_1\sin\theta$$

lub w zwartej postaci:

$${}^0\mathbf{r}_A = \mathbf{R}(X, \theta){}^1\mathbf{r}_A \quad (5)$$

gdzie:

$$\mathbf{R}(X, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

jest podstawową macierzą obrotu wokół osi X o kąt θ . Macierz tą często będziemy oznaczali symbolem $\mathbf{R}(X, \theta)$.

Zadania do wykonania

Zadanie 1

Dane są dwa układy współrzędnych $\{0\}$ i $\{1\}$. Układ $\{1\}$ otrzymano obracając układ $\{0\}$ o kąt θ wokół osi 0Y . Znajdź macierz ${}^0\mathbf{R}_1$ tego przekształcenia.

Zadanie 2

Dane są dwa układy współrzędnych $\{0\}$ i $\{1\}$. Układ $\{1\}$ otrzymano obracając układ $\{0\}$ o kąt θ wokół osi 0Z . Znajdź macierz ${}^0\mathbf{R}_1$ tego przekształcenia.

Zadanie 3

Wektor $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ obrócono wokół osi Z o kąt 90° . Wyznacz współrzędne tego wektora po obrocie, a następnie przesun go o wektor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Zadanie 4

Znajdź macierz obrotu złożonego utworzoną przez obrót o kąt α wokół osi Y, następnie przez obrót o kąt β wokół bieżącej osi Z i w końcu przez obrót o kąt γ wokół bieżącej osi X.

Literatura

- [1] Mandra S.: Materiały do zajęć *Podstawy Robotyki*, 2012
- [2] Craig J. J.: Wprowadzenie do robotyki. Mechanika i sterowanie, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1995
- [3] Jezierski E.: Dynamika robotów, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006
- [4] Spong M. W., Vidyasagar M.: Dynamika i sterowanie robotów, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997