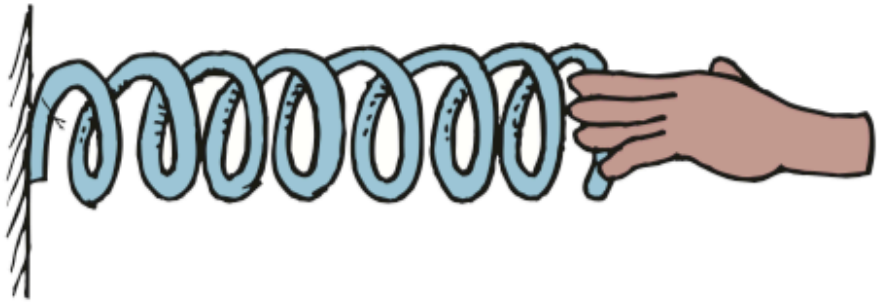
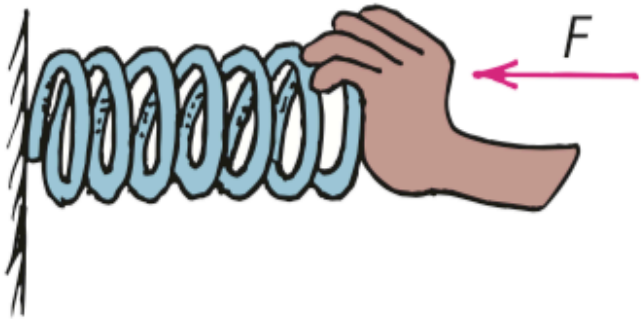
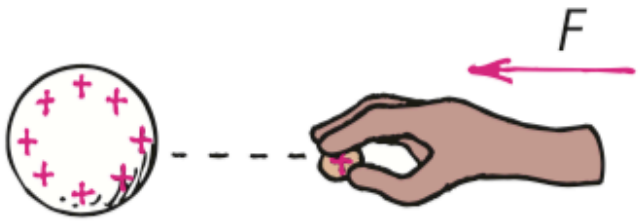
Elektrostatyczna energia potencjalna *U*

Żeby zbliżyć do siebie dwa ładunki jednoimienne trzeba wykonać pracę przeciwko siłom pola nadając ładunkowi energię potencjalną. Podobnie trzeba wykonać pracę przeciwko siłom grawitacyjnym aby podnieść ciało, lub przeciwko sile sprężystości aby ścisnąć sprężynę. Grawitacja i siła sprężystości to siły konserwatywne, czyli praca wykonana przeciwko tym siłom równa się zmianie energii potencjalnej. Podobnie jest w przypadku sił elektrostatycznych.



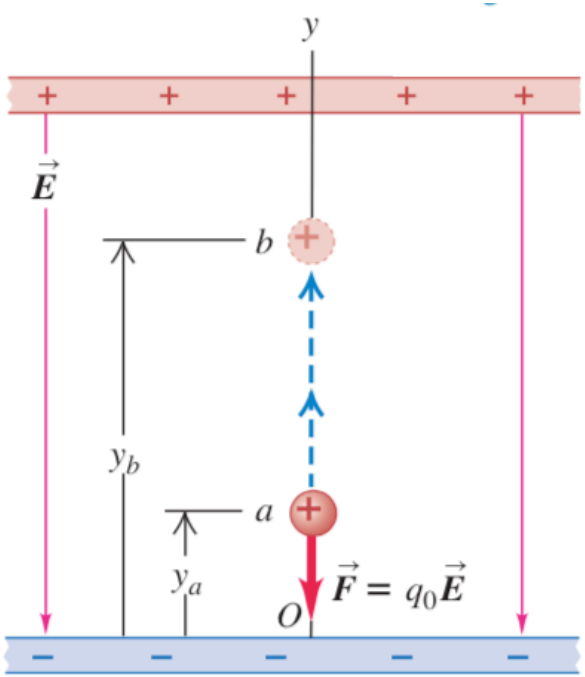




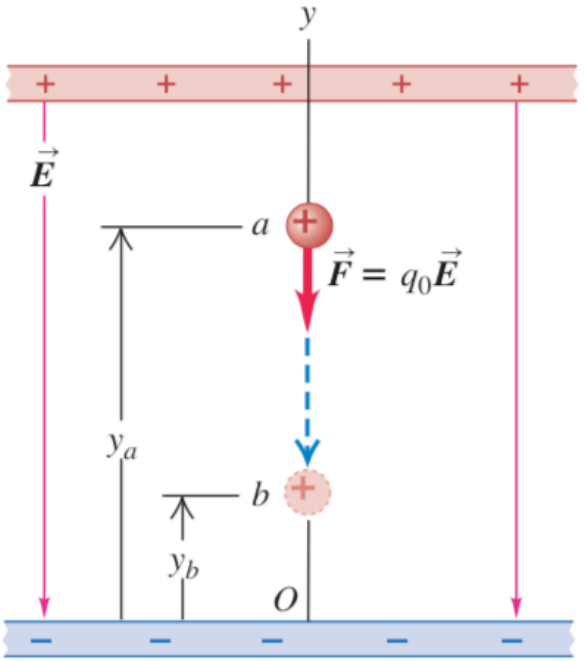
P. G. Hewitt, *Fizyka wokół nas*

Energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)



Energia potencjalna ładunku q rośnie



Energia potencjalna ładunku q maleje

Praca sił elektrostatycznych: $W_{a\to b} = F\cdot\left(y_a - y_b\right) = qE\left(y_a - y_b\right)$

$$W_{a\to b} = -\left[qEy_b - qEy_a\right] = -\left(U_b - U_a\right)$$

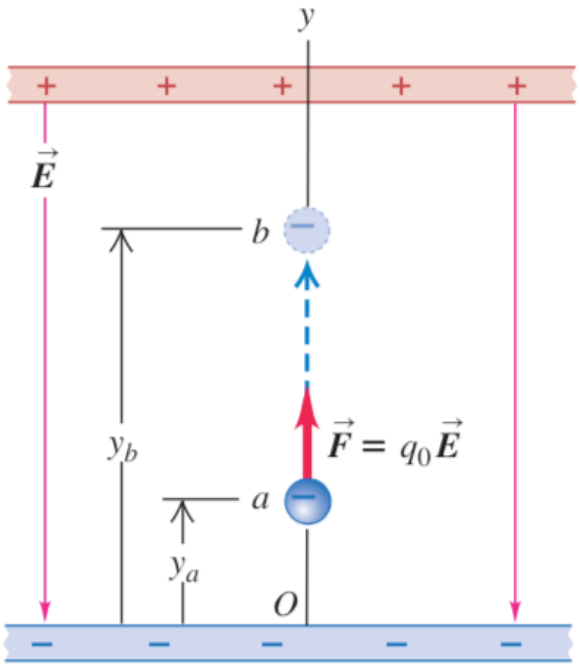
Energia potencjalna ładunku *q* w jednorodnym polu elektrostatycznym:

$$U = qEy$$

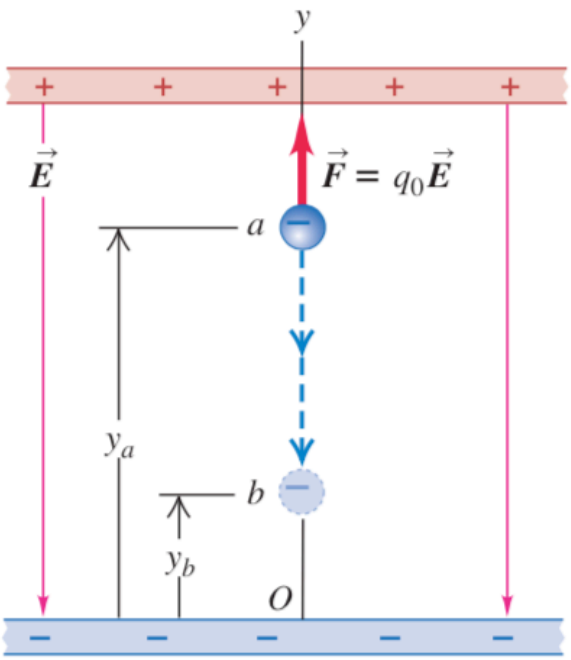
Siła elektrostatyczna jest siłą konserwatywną i praca nie zależy od toru, po którym przesuwamy ładunek od punktu *a* do punktu *b*.

Energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)



Energia potencjalna ładunku q maleje



Energia potencjalna ładunku q rośnie

Praca sił elektrostatycznych: $W_{a\to b} = F\cdot\left(y_a - y_b\right) = qE\left(y_a - y_b\right)$

$$W_{a\to b} = -\left[qEy_b - qEy_a\right] = -\left(U_b - U_a\right)$$

Energia potencjalna ładunku *q* w jednorodnym polu elektrostatycznym:

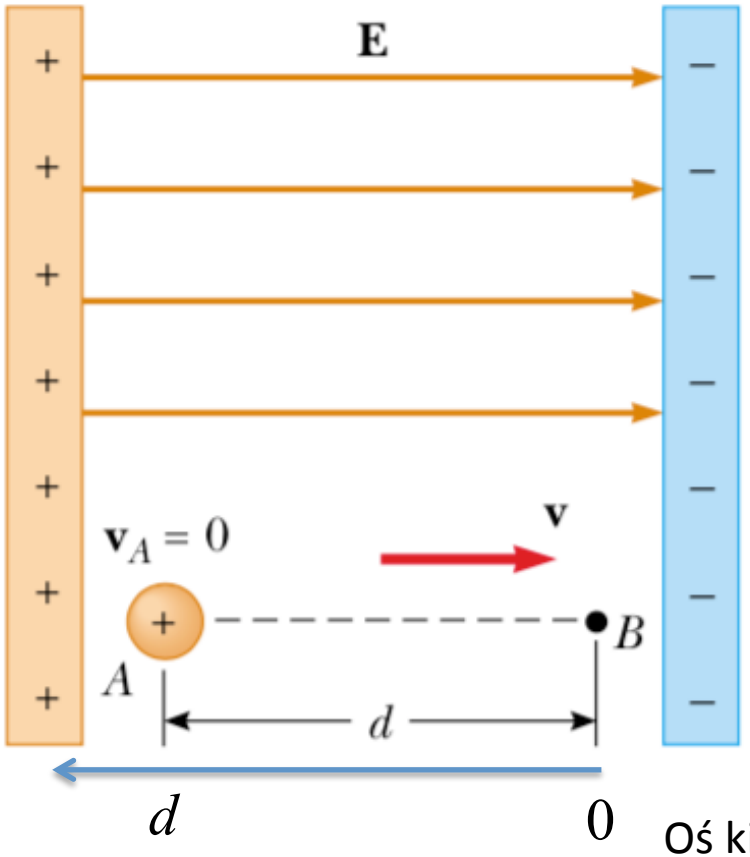
$$U = qEy$$

Siła elektrostatyczna jest siłą konserwatywną i praca nie zależy od toru, po którym przesuwamy ładunek od punktu *a* do punktu *b*.

Zasada zachowania energii w polu elektrostatycznym

Proton ($m = 1.67\times10^{-27}$ kg, $e = 1.6\times10^{-19}$C) znajdujący się początkowo w spoczynku w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 10^4$ N/C zostaje uwolniony. Proton przebywa drogę $d = 0.1$ m w kierunku pola. Jaką osiągnie prędkość w punkcie B?

Pracę wykonują tylko siły elektrostatyczne − energia cząstki jest zachowana:



$$\frac{1}{2}m_p v_A^2 + U_A = \frac{1}{2}m_p v_B^2 + U_B$$

$$\frac{1}{2}m_p v_A^2 + qEy_A = \frac{1}{2}m_p v_B^2 + qEy_B$$

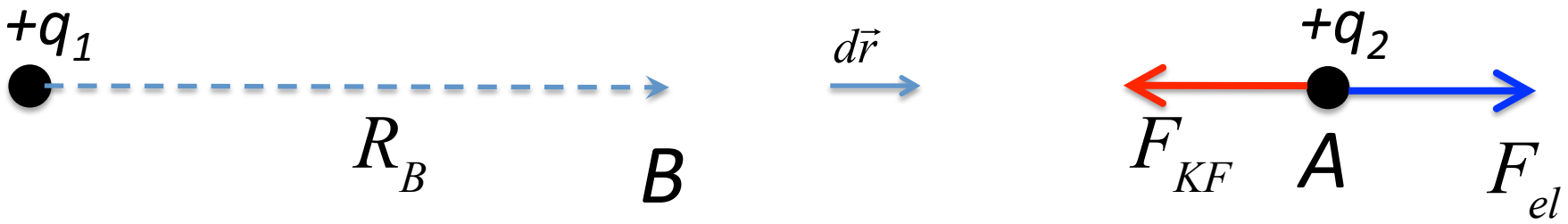
$$0 + qEd = \frac{1}{2}m_p v_B^2 + 0$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m_p}} \approx 4.38\times10^5 \ \mathrm{m/s}$$

Oś kierujemy w stronę wzrostu energii potencjalnej cząstki

Elektrostatyczna energia potencjalna *U* układu dwóch ładunków punktowych (pole niejednorodne)

Praca siły zewnętrznej F_{KF} przy przesunięciu ładunku $+q_2$ z punktu A do punktu B:



$$W_{KF} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{F}_{KF} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_A}^{R_B} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = kq_1q_2 \int_{R_B}^{R_A} \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2 \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right)$$

$$W_{KF} = U_B - U_A$$

Siła elektrostatyczna jest siłą konserwatywną i praca nie zależy od toru, po którym przesuwamy ładunek od punktu A do punktu B.

Zakładając, że dla $R_A \to \infty$ energia potencjalna $U_A = 0$. Elektrostatyczną energię potencjalną możemy zapisać:

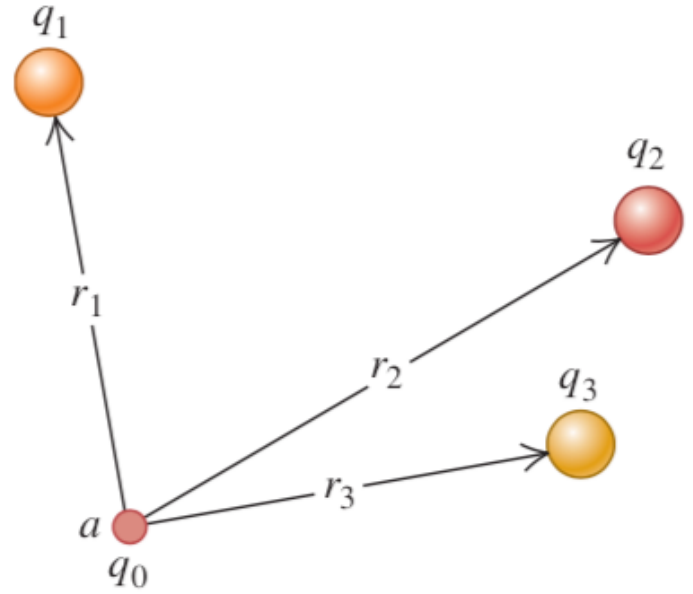
$$U = k\frac{q_1q_2}{R} \quad [J]$$

Elektrostatyczna energia potencjalna układu dwóch ładunków punktowych q_1 i q_2 znajdujących się w odległości R od siebie. Lub inaczej: energia potencjalna ładunku q_2 w polu ładunku q_1 (i na odwrót).

Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku punktowego w polu wielu ładunków punktowych

Energia potencjalna ładunku q_0 w polu innych ładunków:

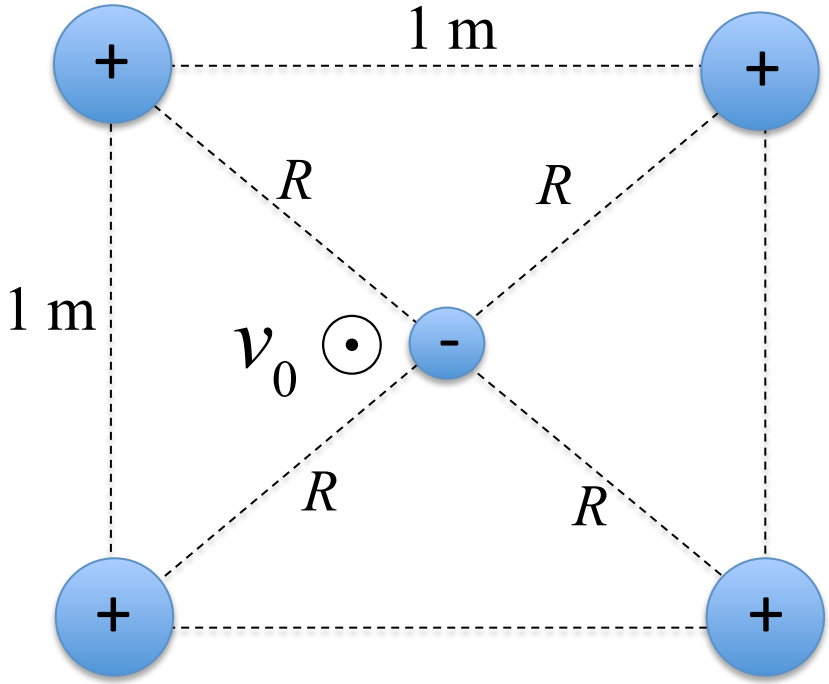
$$U = kq_0\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$



Całkowita energia potencjalna ładunku q_0 jest sumą algebraiczną energii potencjalnych, które q_0 posiada w polu każdego ładunku z osobna.

Zasada zachowania energii w polu elektrostatycznym

Cztery protony umieszczono w wierzchołkach kwadratu o boku 1 m. Jaką minimalną prędkość v_0 musi posiadać elektron, znajdujący się w środku kwadratu, by oddalić się na nieskończoną odległość od ładunków?



Zasada zachowania energii zastosowana do elektronu:

$$\frac{1}{2}m_e v_0^2 + U_0 = \frac{1}{2}m_e v_\infty^2 + U_\infty$$

$$\frac{1}{2}m_e v_0^2 + 4k\frac{e(-e)}{R} = 0 + 0$$

$$v_0 = 4e\sqrt{\frac{k}{m_e R}} \approx 75.7 \text{ m/s}$$

$$e = 1.6\times10^{19}\text{C}$$

$$m_e = 9.1\times10^{-31}\text{kg}$$

Elektrostatyczna energia potencjalna zmagazynowana w układzie wielu ładunków punktowych

Zbudowanie każdej konfiguracji ładunku wymaga pracy, która jest magazynowana w całkowitej energii potencjalnej układu.

Przenosimy kolejne ładunki z nieskończoności do punktów $\boldsymbol{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,…

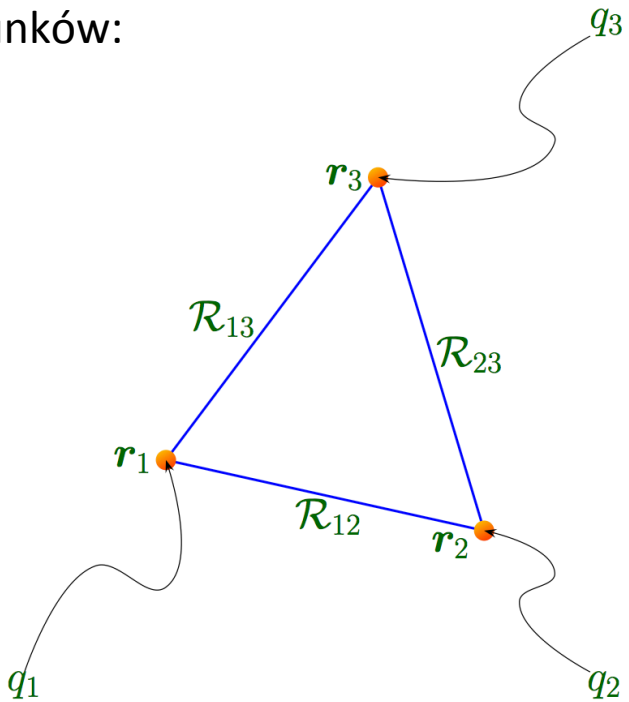
Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków:

$$W_1 = 0$$ (nie trzeba wykonywać żadnej pracy przeciwko siłom elektrostatycznym, bo jeszcze nie ma ładunków)

$$W_2 = kq_2\left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}}\right)$$

$$W_3 = kq_3\left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}}\right)$$

$$W_4 = kq_4\left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3}{\mathcal{R}_{34}}\right)$$



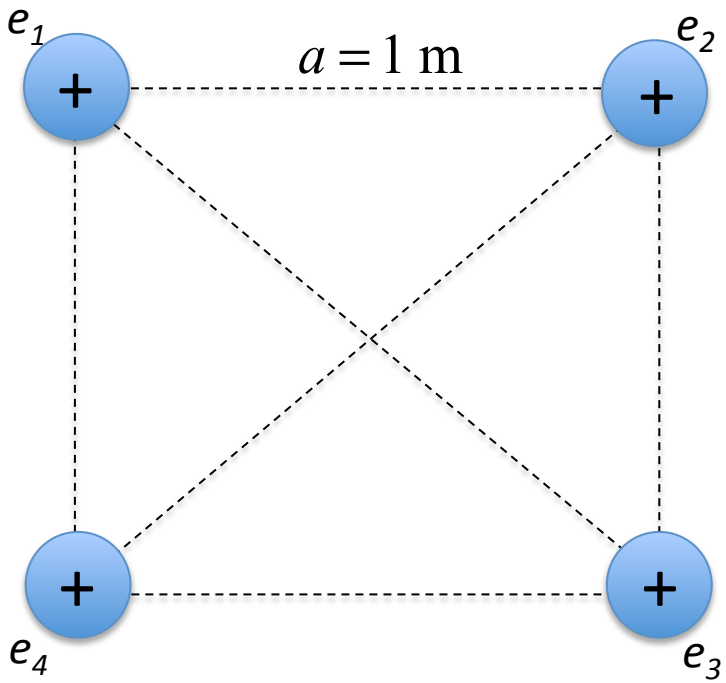
Całkowita praca (= energii potencjalnej układu):

$$U = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = k\left(\frac{q_1q_2}{\mathcal{R}_{12}} + \frac{q_1q_3}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_1q_4}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2q_3}{\mathcal{R}_{23}} + \frac{q_2q_4}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3q_4}{\mathcal{R}_{34}}\right)$$

Energia zmagazynowana w układzie ładunków

Ile wynosi energia potencjalna zmagazynowana w przedstawionej konfiguracji ładunków (4 protony w rogu kwadratu o boku *a*):

$$e = 1.6 \times 10^{19}\,\mathrm{C}$$



Energia zmagazynowana w układzie:

$$U = k\left(\frac{e_1 e_2}{a} + \frac{e_1 e_3}{a\sqrt{2}} + \frac{e_1 e_4}{a} + \frac{e_2 e_3}{a} + \frac{e_2 e_4}{a\sqrt{2}} + \frac{e_3 e_4}{a} \right)$$

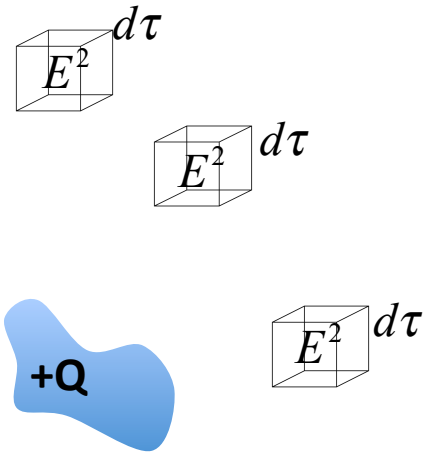
$$U = k\left(4\frac{e^2}{a} + 2\frac{e^2}{a\sqrt{2}} \right) = 1.25 \times 10^{-27}\,\mathrm{J}$$

*Elektrostatyczna energia potencjalna zmagazynowana w dowolnym ciągłym rozkładzie ładunków

Przepis na wyznaczenie energii potencjalnej dowolnego ciągłego rozkładu ładunków:

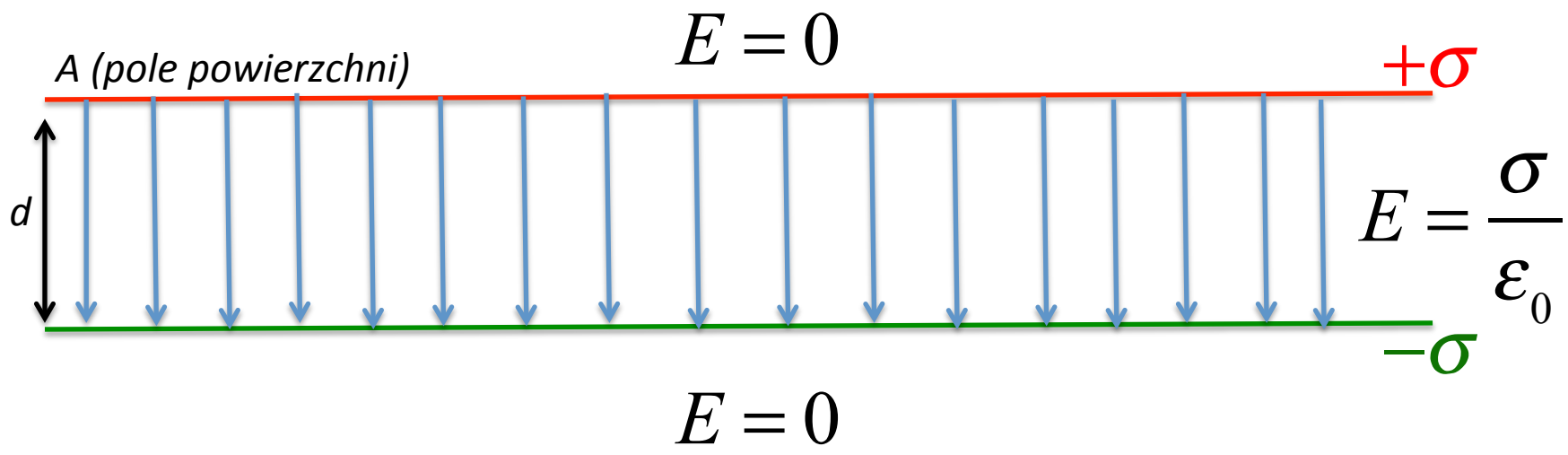
$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{cala \\ przestrzen}} E^2 d\tau$$

całka objętościowa po całej przestrzeni z kwadratu wartości natężenia pola elektrycznego



…. całka ta oznacza sumę kwadratów natężenia pola elektrycznego po każdym punkcie przestrzeni (nieskończenie małym elemencie objętościowym dτ)

Energia zgromadzona pomiędzy dwoma różnoimiennie naładowanymi płytkami



Elektrostatyczna energia potencjalna zgromadzona w obszarze między dwoma płytkami o powierzchni A i oddalonymi od siebie o *d*:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{cala \\ przestrzen}} E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \int d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 Ad = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} Ad$$

Potencjał elektryczny *V*

Potencjał elektryczny definiujemy jako energię potencjalną na jednostkę ładunku:

Definicja:

$$V = \frac{U}{q} \qquad \left[\frac{J}{C} = V\right] \text{Wolt}$$

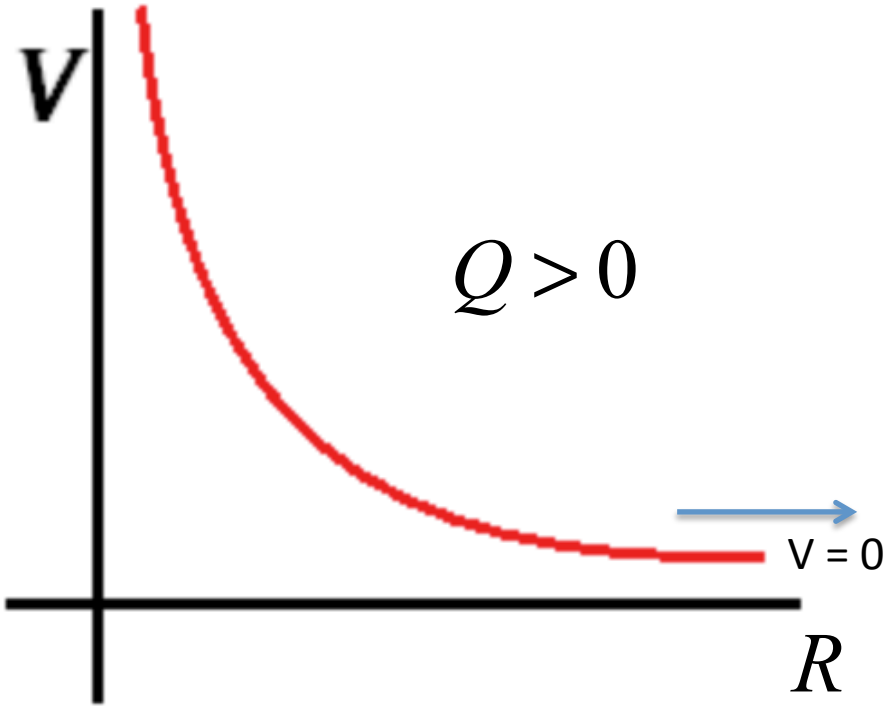
Dla pola ładunku punktowego:

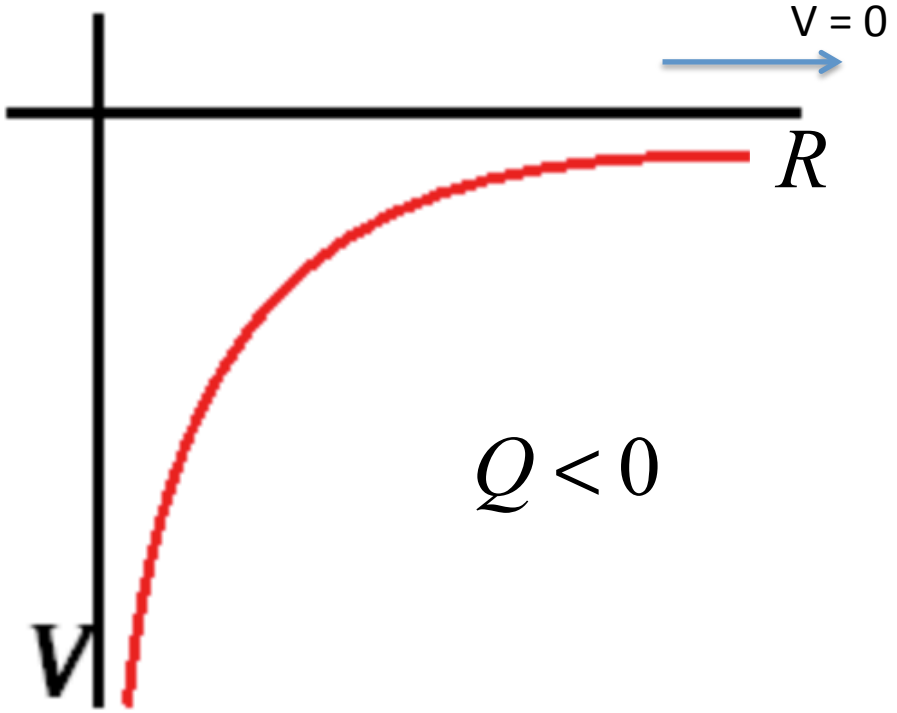
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Potencjał charakteryzuje pole elektryczne (tzn. jest cechą przestrzeni, a nie ładunku)

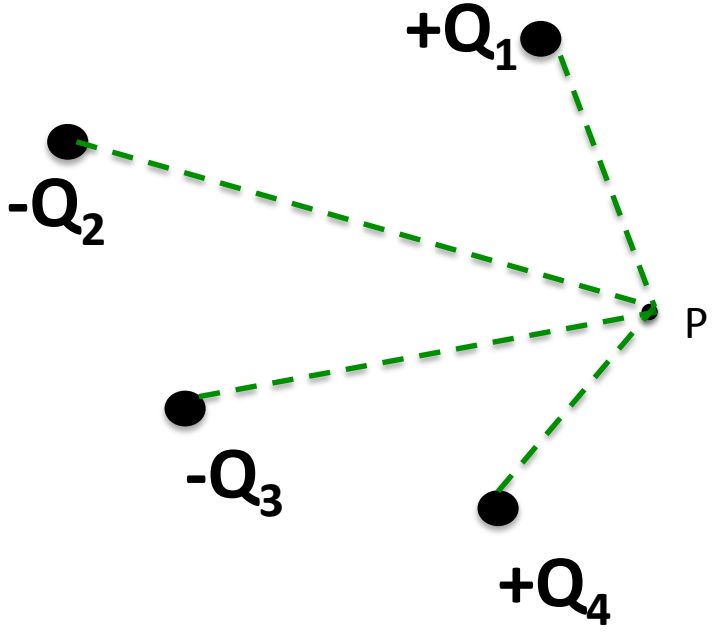
Potencjał elektryczny *V* pola ładunku punktowego

$$V = k\frac{Q}{R}$$



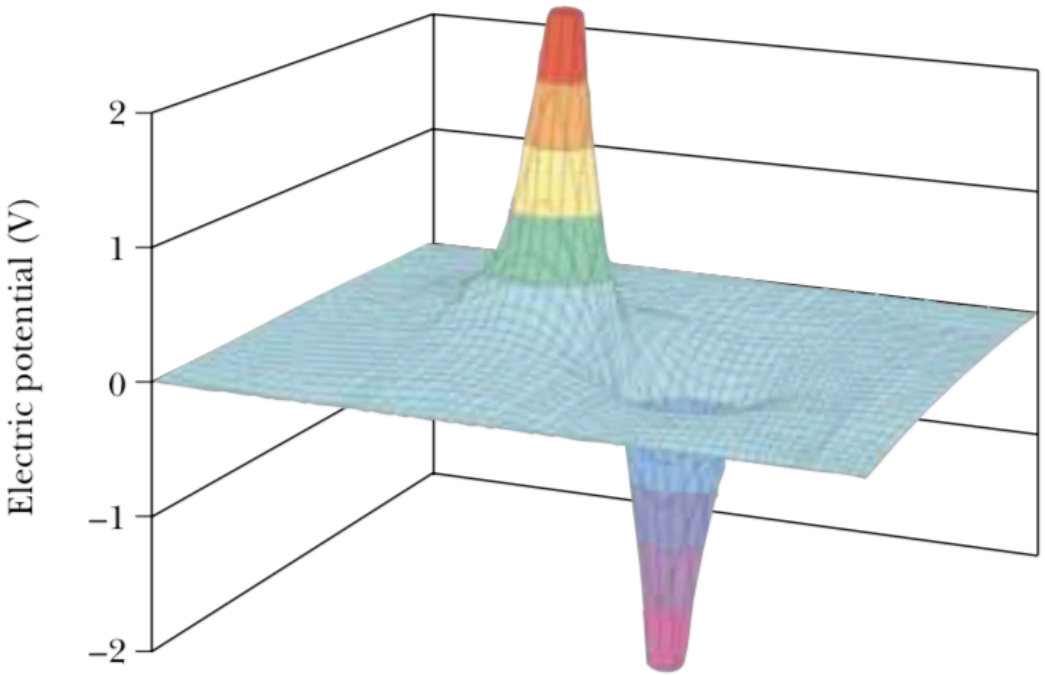


Potencjał układu ładunków punktowych



$$V_P = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \sum_{i=1}^{4} V_i$$

Potencjał dipola elektrycznego:

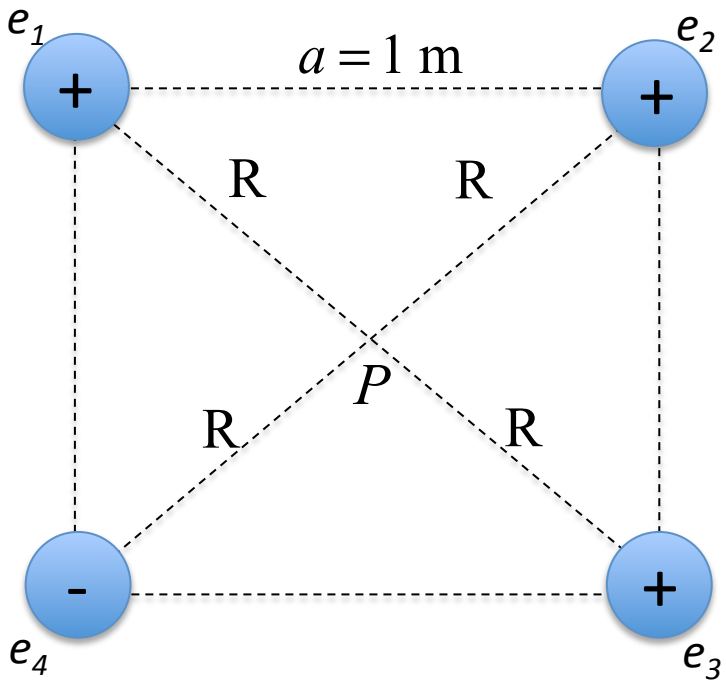


Superpozycja potencjału ładunków punktowych

Ile wynosi potencjał w środku kwadratu o boku *a* = 1m utworzonego przez trzy protony i jeden elektron :

$$e_1 = e_2 = e_3 = 1.6 \times 10^{19}\,\mathrm{C}$$

$$e_4 = -1.6 \times 10^{19}\,\mathrm{C}$$

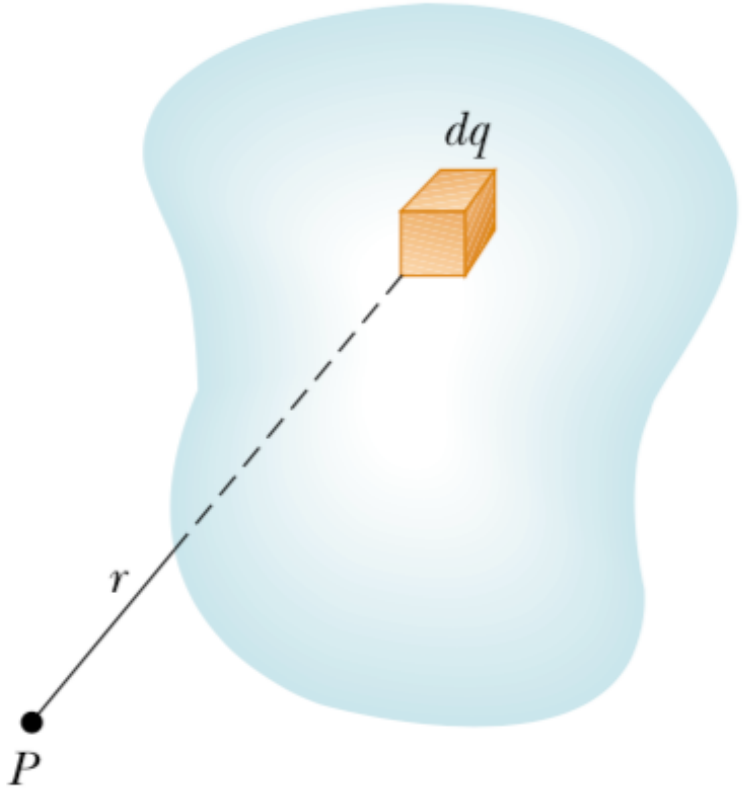


Potencjał w punkcie *P*:

$$V = k\left(\frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R} + \frac{e_3}{R} + \frac{e_4}{R}\right) = k\left(3\frac{e}{R} - \frac{e}{R}\right) = 2k\frac{e}{R} \approx 2.5\ \mathrm{nV}$$

*Wyznaczenie potencjału pola wytwarzanego przez ciągły rozkład ładunku (superpozycja potencjału)

Potencjał elektryczny w punkcie P wytwarzany przez ciągły rozkład ładunku można obliczyć dzieląc rozkład ładunku na „małe” elementy dq, które zachowują się jak ładunki punktowe. Całkowity potencjał jest sumą po wszystkich małych elementach rozkładu.



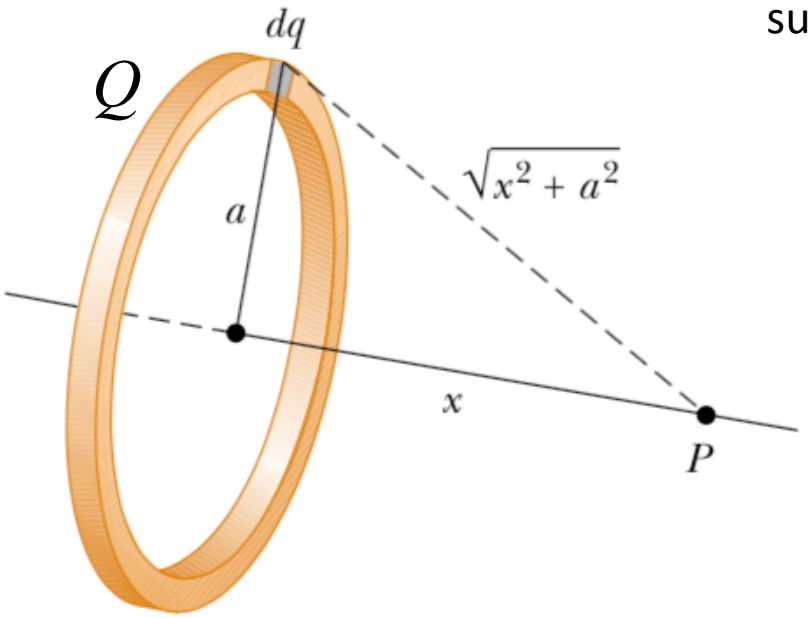
Potencjał od małego elementu d*q* (ładunek punktowy):

$$dV = k\frac{dq}{r}$$

Całkowity potencjał (suma po wszystkich elementach d*q*):

$$V = \int dV = k\int \frac{dq}{r}$$

*Wyznaczenie potencjału pola wytwarzanego przez ciągły rozkład ładunku - przykład

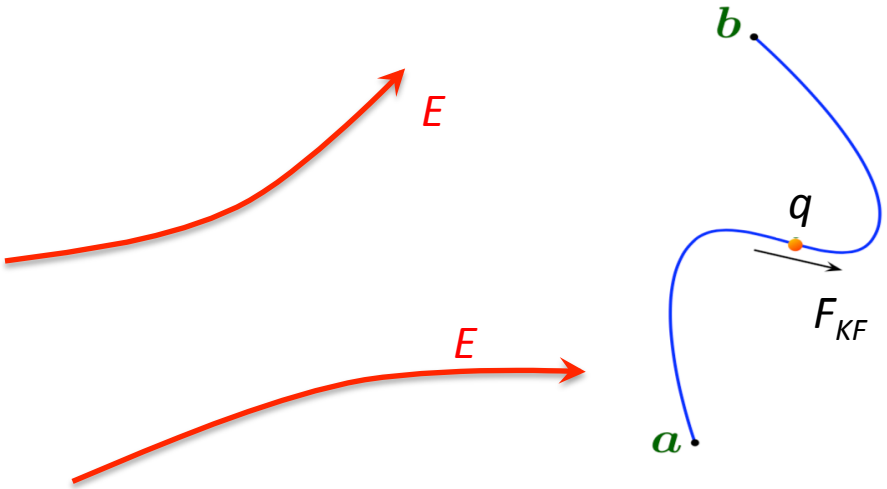


Wcześniej pokazaliśmy korzystając z zasady superpozycji dla natężenia pola elektrycznego, że:

$$\vec{E} = k\frac{Qx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\hat{x}$$

$$dV = \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \Rightarrow \quad V = \int \frac{kdq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = k\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int dq = k\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Praca, potencjał i napięcie
dla pól wytworzonych przez dowolny rozkład ładunku (niekoniecznie ładunek punktowy)



http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas/

Praca siły zewnętrznej F_{KF} potrzebna na przeniesienie ładunku *q* od *a* do *b*: $W_{a\to b} = U_b - U_a$

Praca siły zewnętrznej na jednostkę ładunku: $W_{a\to b}/q = U_b/q - U_a/q = V_b - V_a$

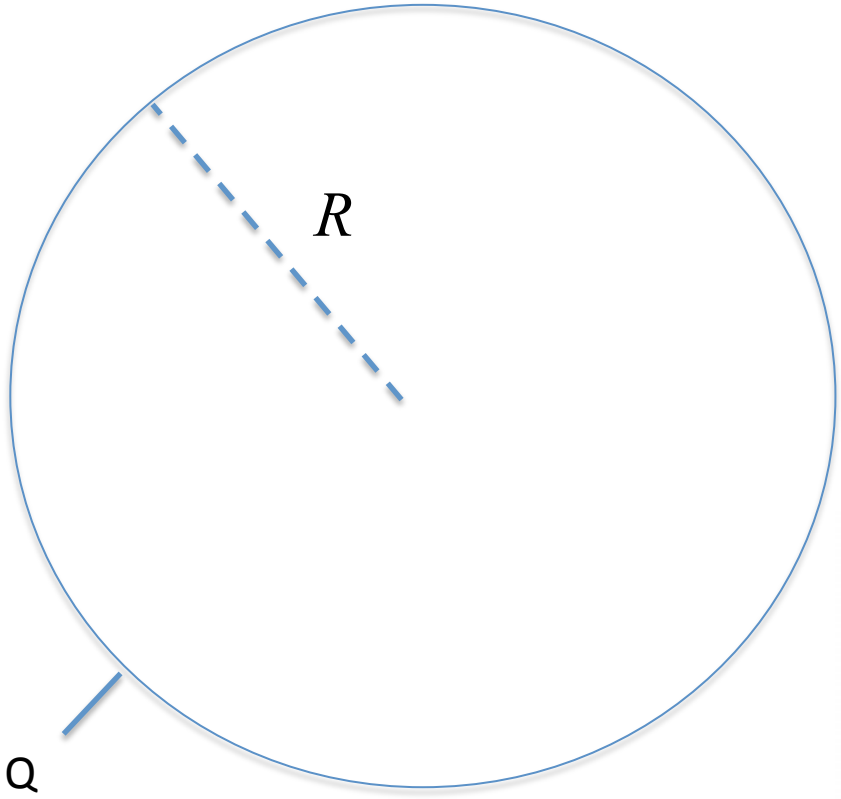
$$\boxed{W_{a\to b} = q\Delta V_{ab}}$$

Napięcie elektryczne (różnica potencjałów):

$$\Delta V_{ab} = \frac{W_{a\to b}}{q} = \int_a^b \frac{\vec{F}_{KF}}{q}\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

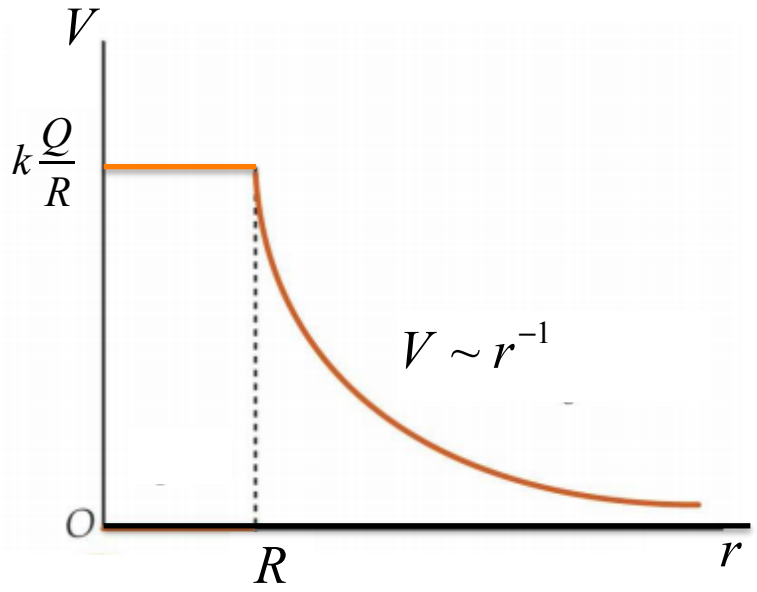
Potencjał elektryczny jednorodnie naładowanej sfery,

przykład wyznaczania potencjału na podstawie znajomości natężenia pola elektrycznego



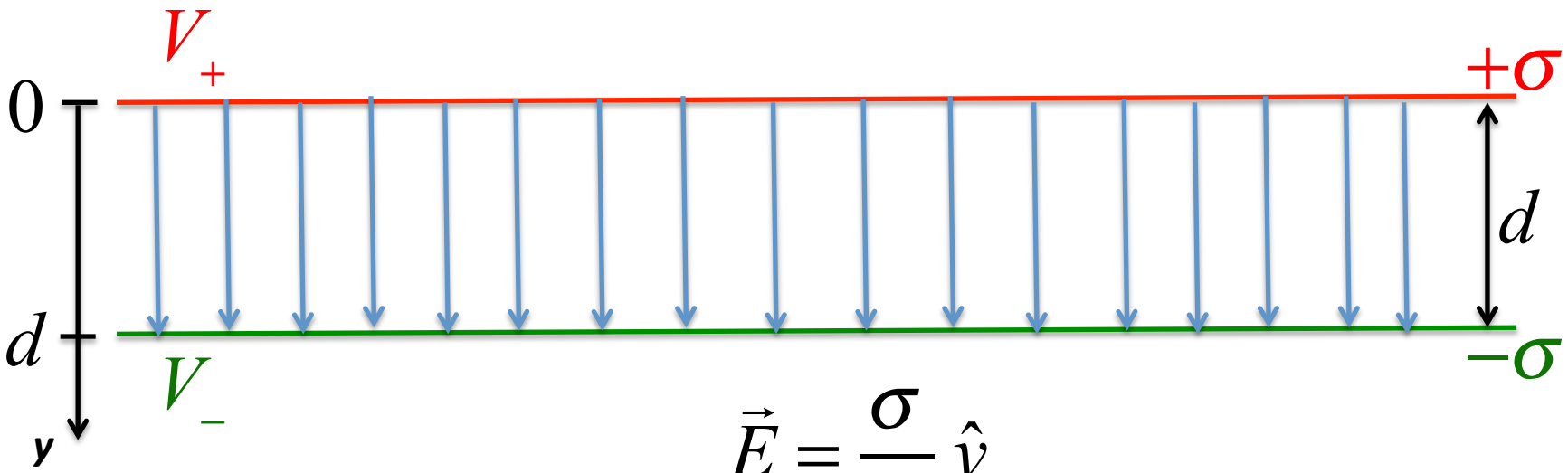
$$\Delta V = V - 0 = V = k\frac{Q}{R} \text{ dla } r < R$$

$$\Delta V = V - 0 = V = k\frac{Q}{r} \text{ dla } r > R$$



Przykład wyznaczania różnicy potencjałów (napięcia) między dwoma punktami w przestrzeni na podstawie znajomości pola elektrycznego

Dwie nieskończenie wielkie płaszczyzny naładowane ładunkiem różnoimiennym wytwarzają pole jednorodne:



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

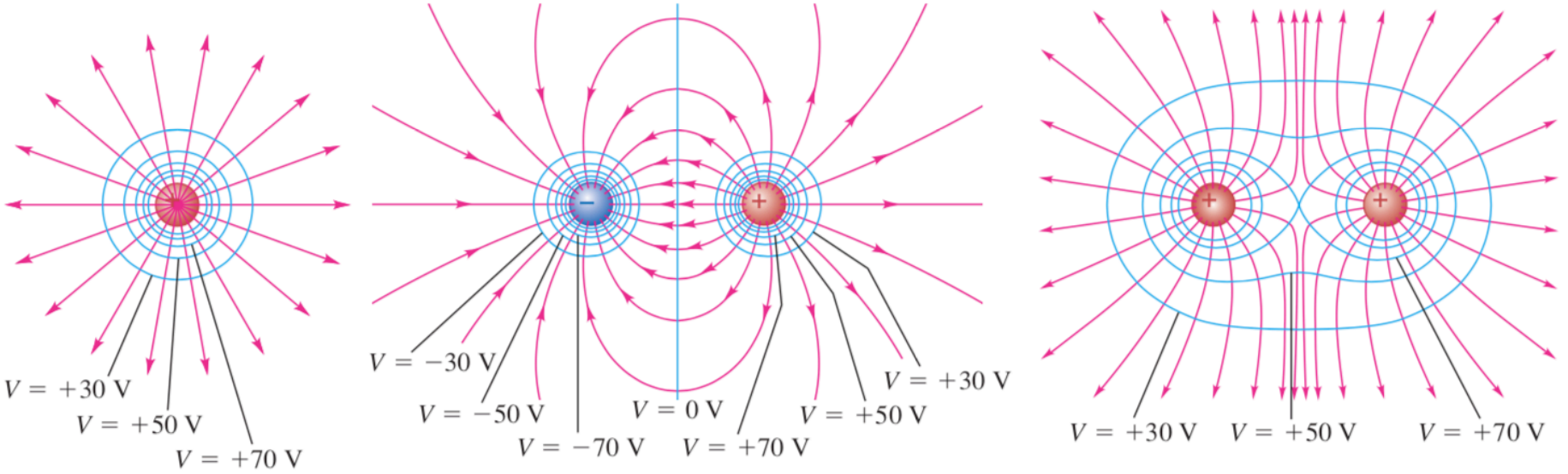
$$V_+ - V_- = -\int_d^0 \vec{E}\cdot d\vec{y} = -E\int_d^0 dy = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} y\Big|_d^0 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta V_{+/-} = Ed}$$

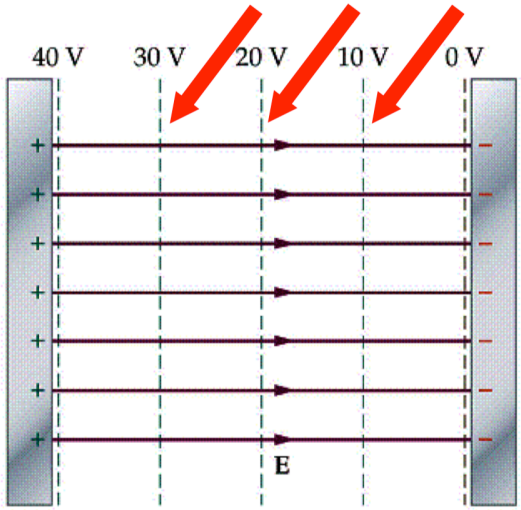
Różnica potencjałów pomiędzy punktami odległymi o *d* w jednorodnym polu elektrycznym

Powierzchnie ekwipotencjalne

= *powierzchnie o stałej wartości potencjału*



Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics



Podczas przesunięcia ładunku *q* po powierzchni ekwipotencjalnej, siły pola elektrycznego nie wykonują pracy! To jest możliwe tylko wtedy gdy natężenie pola elektrycznego, tj. siła elektryczna działająca na ładunek, jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych!

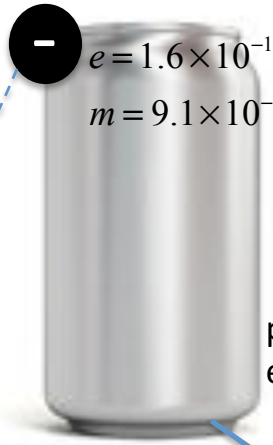
Zasada zachowania energii w polu elektrostatycznym

$V_2 = 150\ \mathrm{V}$

$v_2 = ???\ \ \mathrm{m/s}$

$v_1 = 0\ \ \mathrm{m/s}$

przewodnik to ciało ekwipotencjalne



$e = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$

$m = 9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$

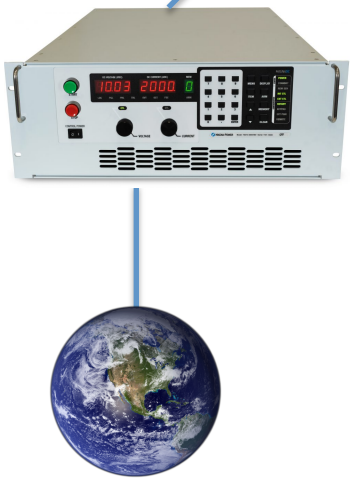
$V_1 = 50\ \mathrm{V}$

przewodnik to ciało ekwipotencjalne

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2)}$$

$$v_2 = 5.93\times10^6\ \mathrm{m/s}$$



$V = 0\ \mathrm{V}$

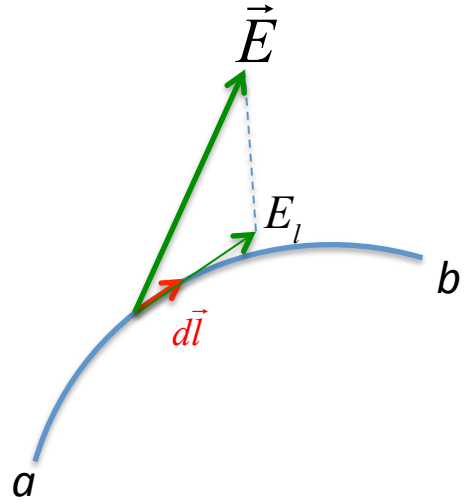
$V = 0\ \mathrm{V}$

Wyznaczenie natężenia pola elektrycznego na podstawie znajomości potencjału

$$V_b - V_a = \Delta V_{ab} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_l dl$$

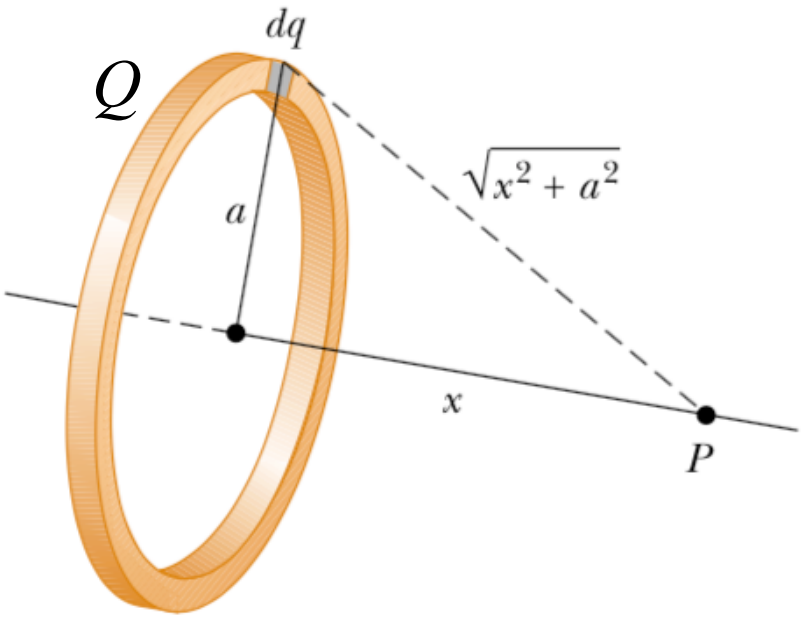
$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$



$$E_x = -\frac{dV}{dx}, \qquad E_y = -\frac{dV}{dy}, \qquad E_z = -\frac{dV}{dz}.$$

Natężenie pola elektrycznego to gradient potencjału elektrycznego

*Wyznaczenie natężenia pola na podstawie znajomości potencjału - przykład



$$V = k\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

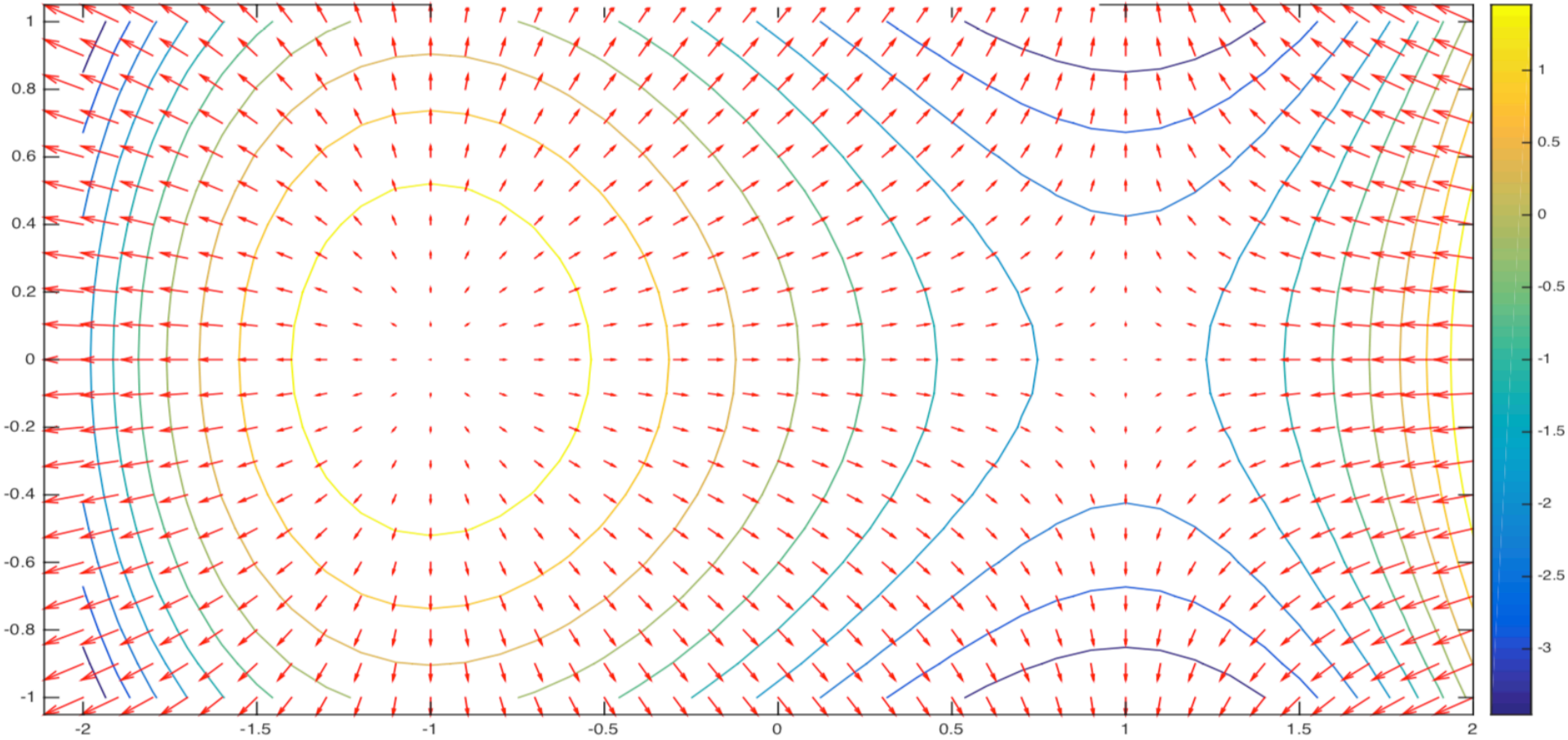
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = k\frac{Q}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

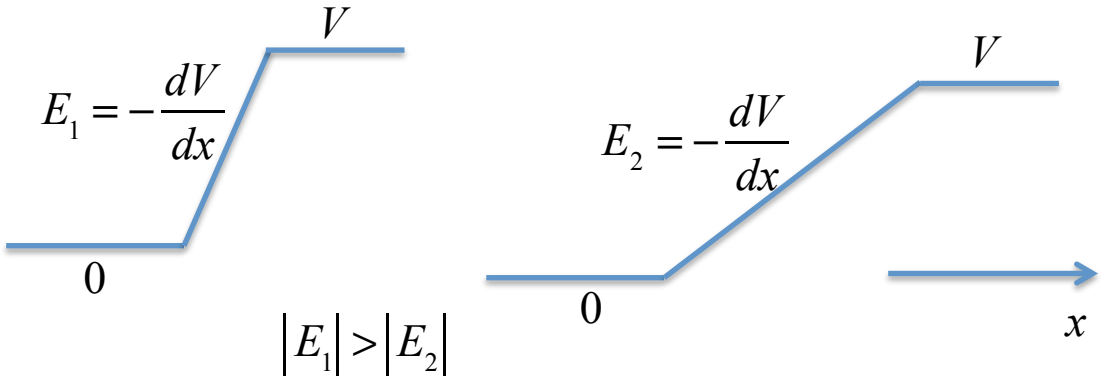
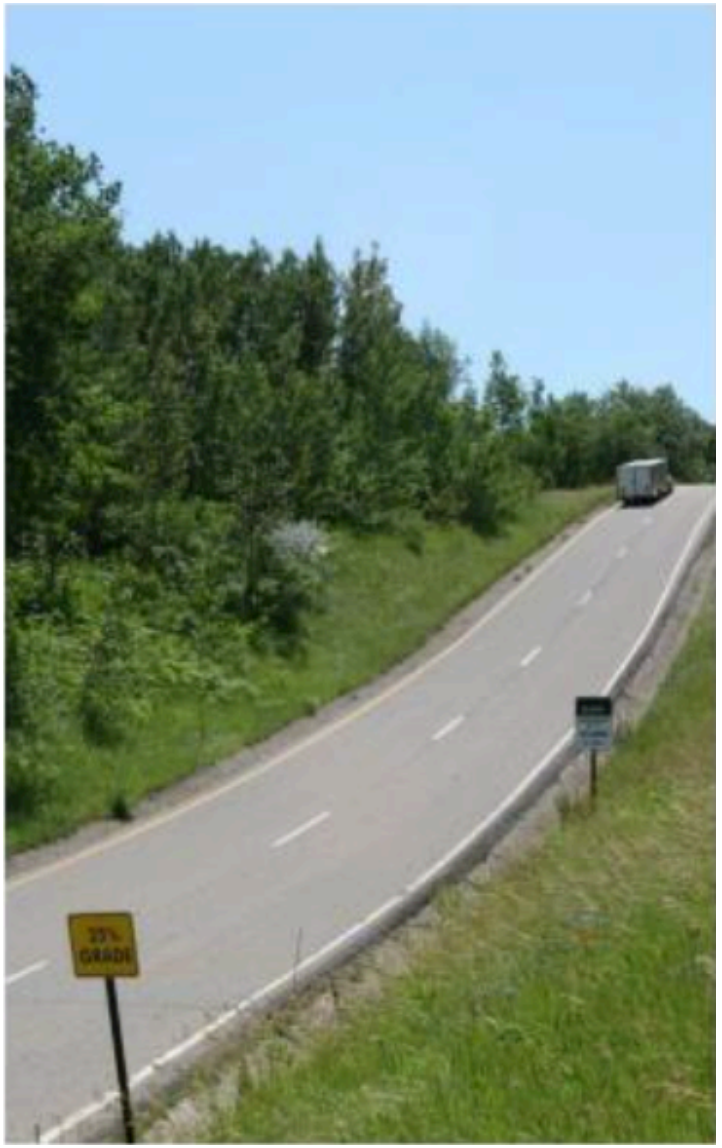
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\vec{E} = k\frac{Qx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\hat{x}$$

Natężenie pola elektrycznego to gradient potencjału elektrycznego ze znakiem minus (gradient to wektor, który wskazuje kierunek najszybszego wzrostu pola skalarnego, np. potencjału, a wartość gradientu określa szybkość zmian tego pola w danym punkcie)



Użyteczna analogia

potencjał = różnica wysokości (wzniesienie)

natężenie pola elektrycznego = nachylenie (stromość)