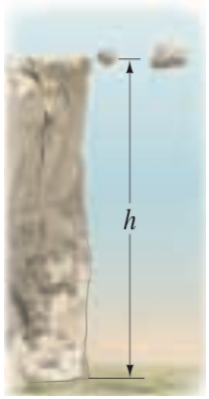
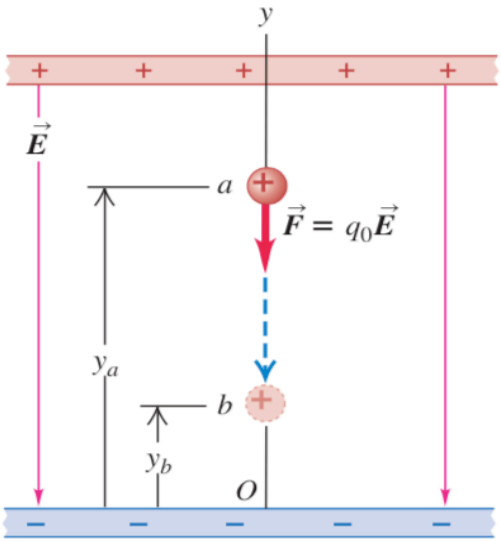
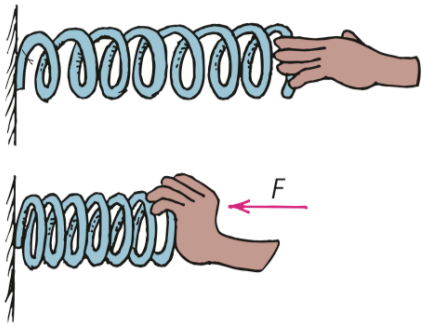
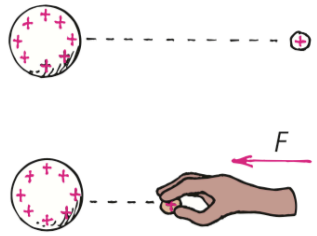
Wykład 8

Elektrostatyczna energia potencjalna





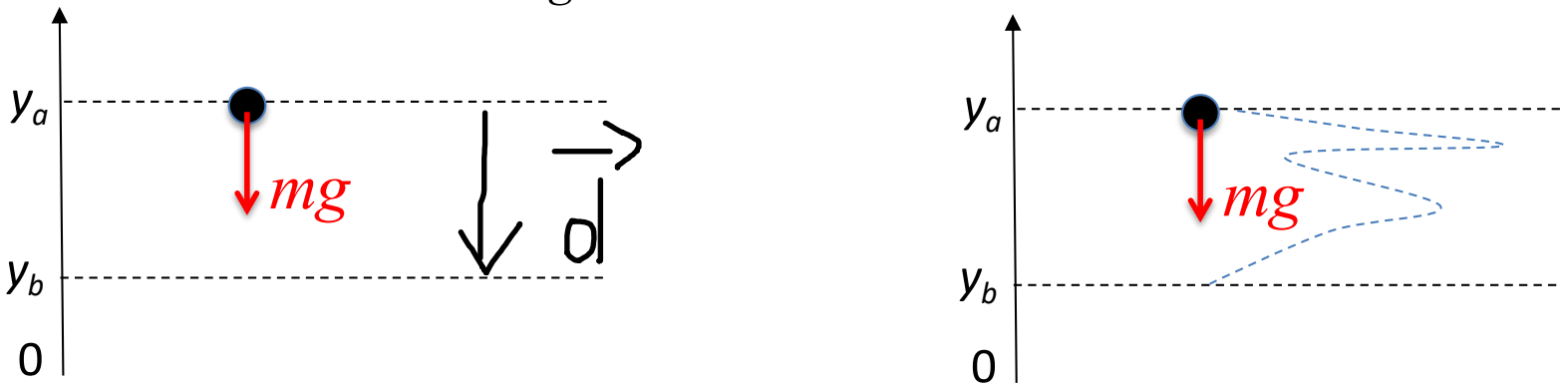




Grawitacyjna energia potencjalna

Praca siły grawitacji nie zależy od drogi przebytej przez ciało, a jedynie od końcowego i początkowego położenia ciała.

$$W_{mg} = mgy_a - mgy_b$$



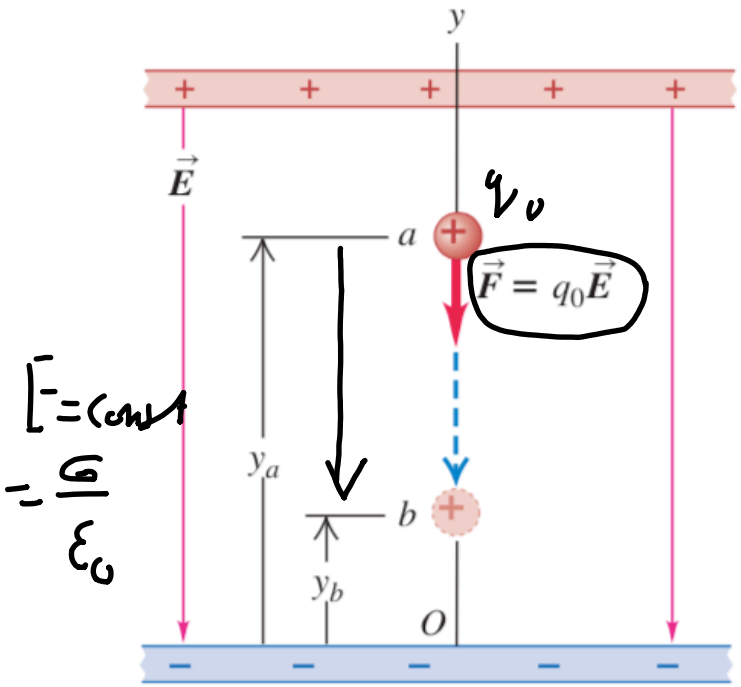
Grawitacyjna energia potencjalna na wysokości y względem punktu odniesienia ($y=0$):

$$U = mgy$$

Praca siły grawitacji: $$W_{mg} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)

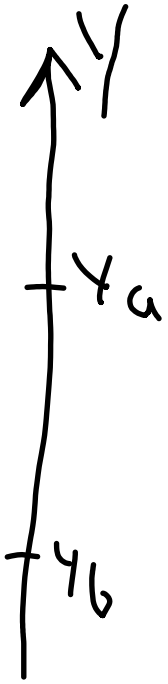


Energia potencjalna ładunku q maleje

$E = U$

$E = 0$

$E = \text{const} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



$$W_{qE} = \vec{F} \circ \vec{d} =$$

$$= q_0 \vec{E} \cdot \vec{d} =$$

$$= q_0 E \cdot (y_a - y_b) \cdot \cos 0^\circ =$$

$$= \underbrace{q_0 E y_a}_{U_A} - \underbrace{q_0 E y_b}_{U_B} =$$

$$= -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

$$\boxed{U = q_0 E y}$$

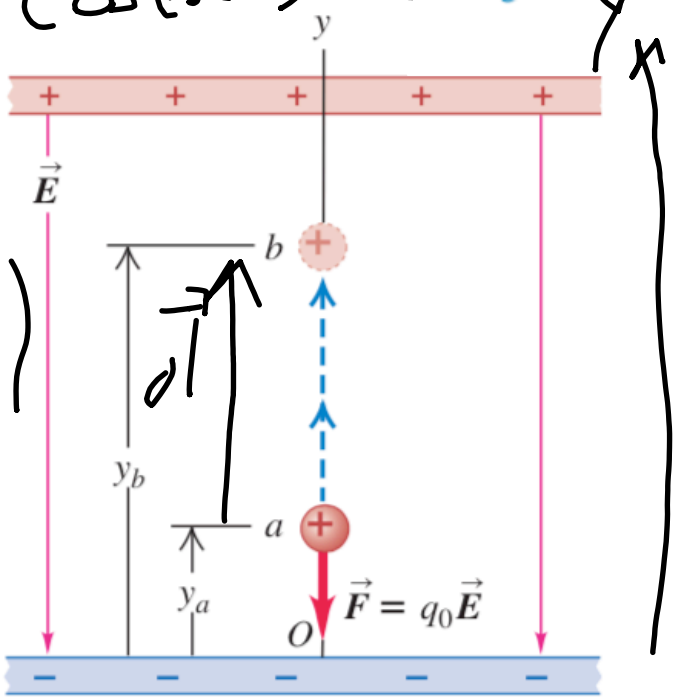
Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)

$$W_{q_0 E} = \vec{F} \circ \vec{d} = q_0 E \cdot (y_b - y_a) \cdot \cos(180^\circ) = -$$

$$= -q_0 E (y_b - y_a) = -(q_0 E y_b - q_0 E y_a)$$

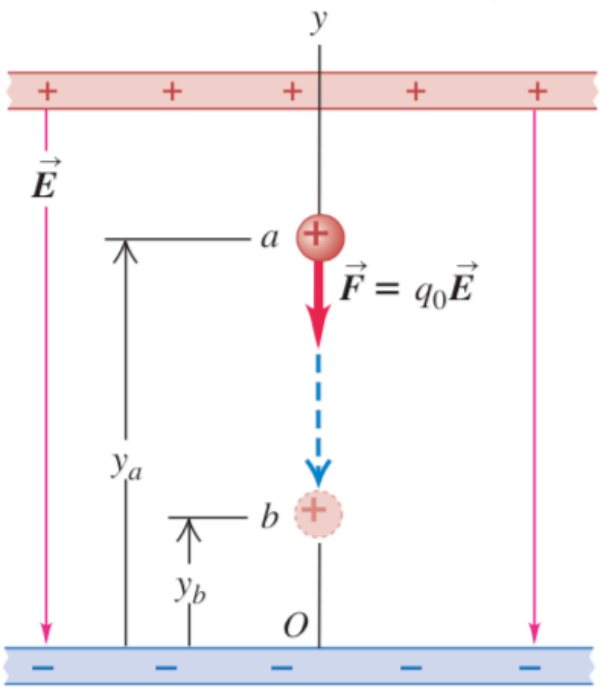
$$= -(U_b - U_a) = -\Delta U$$



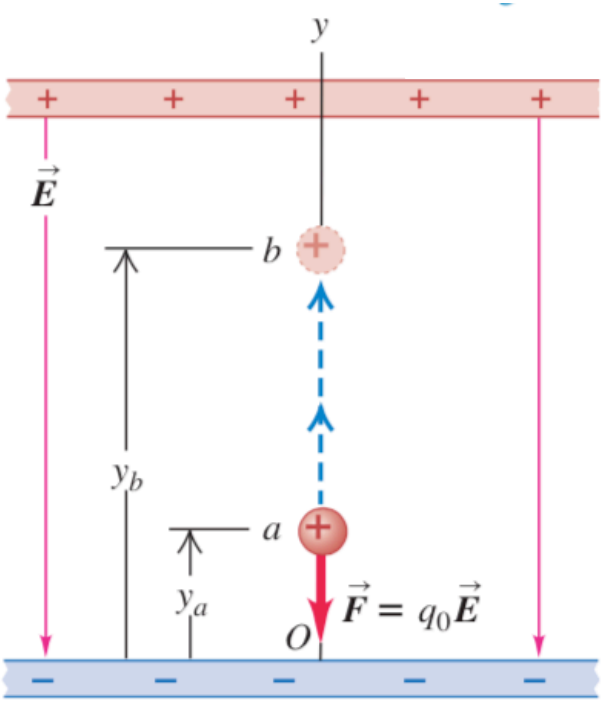
Energia potencjalna ładunku q rośnie

Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)



Energia potencjalna ładunku q maleje



Energia potencjalna ładunku q rośnie

Praca sił elektrostatycznych:

$$W_{a\to b} = F\cdot\left(y_a - y_b\right)\cos 0 = q_0 E\left(y_a - y_b\right)$$

$$W_{a\to b} = -\left[q_0 E y_b - q_0 E y_a\right] = -\left(U_b - U_a\right)$$

$$W_{a\to b} = F\cdot\left(y_b - y_a\right)\cos \pi = q_0 E\left(y_a - y_b\right)$$

$$W_{a\to b} = -\left[q_0 E y_b - q_0 E y_a\right] = -\left(U_b - U_a\right)$$

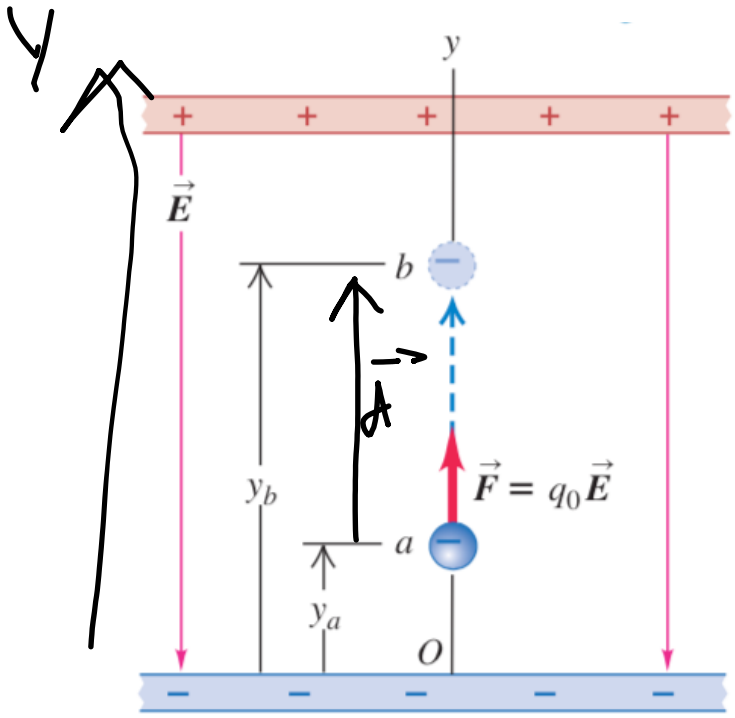
Energia potencjalna ładunku dodatniego q w jednorodnym polu elektrostatycznym liczona względem płytki ujemnej ($y = 0$):

$$U = q_0 E y$$

Siła elektrostatyczna jest siłą konserwatywną i praca nie zależy od toru, po którym przesuwamy ładunek od punktu *a* do punktu *b*.

Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)



Energia potencjalna ładunku q maleje

$$W_{q_0 E} = q_0 \bar{E} \cdot (y_b - y_a) \cdot 1 =$$

$$= q_0 \bar{E}_{y_b} - q_0 \bar{E}_{y_a} =$$

$$= -\left(\underbrace{-q_0 E_{y_b}}_{U_B}\right) - \left(\underbrace{-q_0 E_{y_a}}_{U_A}\right) =$$

$$= -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

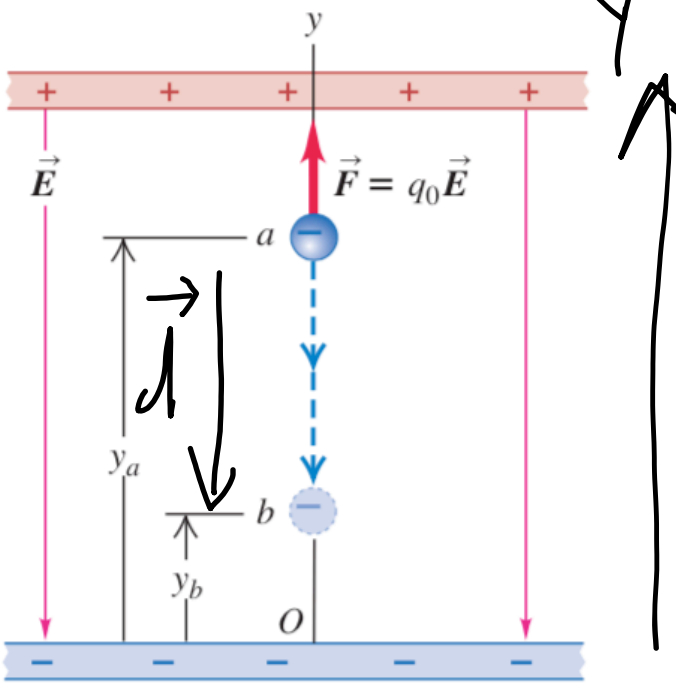
$$\boxed{U = -q_0 E y}$$

Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)

$$W = -q_0 E (y_a - y_b) =$$

$$= -\left(-q_0 E y_b - \left(-q_0 E y_a\right)\right)$$



Energia potencjalna ładunku q rośnie

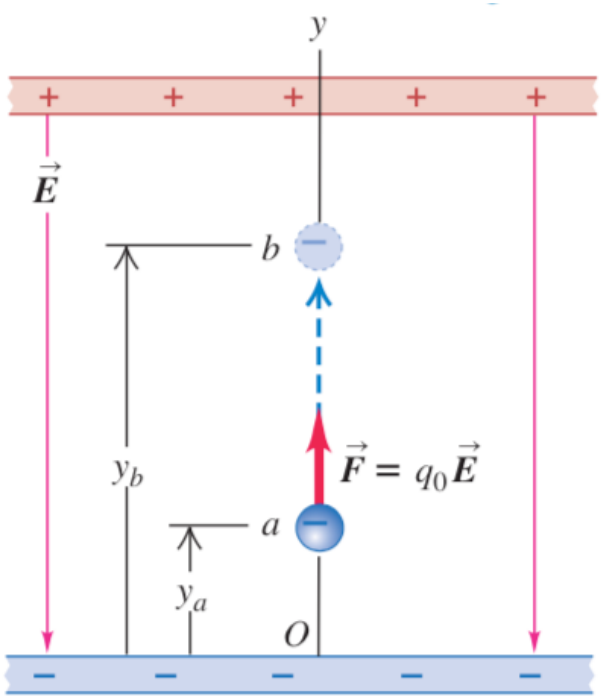
$$\boxed{U = q_0 E y}$$

$q_0 > 0$ dla ładunku dodatniego

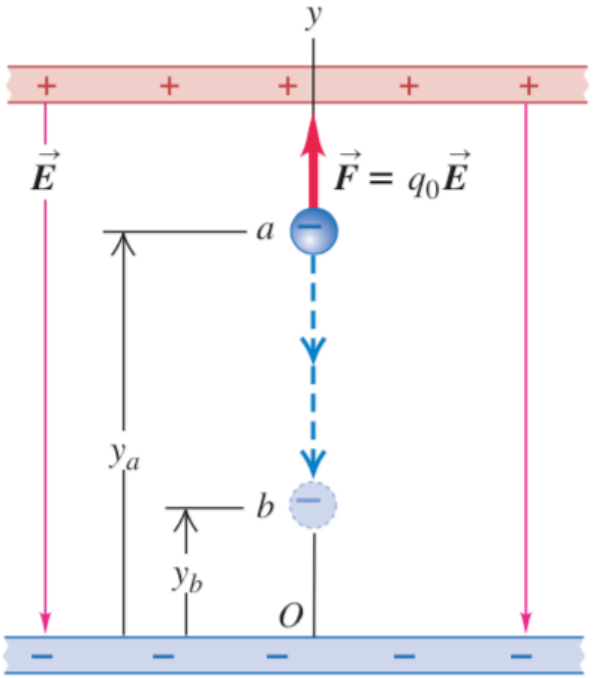
$q_0 < 0$ dla ładunku ujemnego

Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku w polu jednorodnym

(analogia z polem grawitacyjnym w pobliżu Ziemi)



Energia potencjalna ładunku q maleje



Energia potencjalna ładunku q rośnie

Praca sił elektrostatycznych:

$$W_{a\to b} = F\cdot\left(y_b - y_a\right)\cos 0 = q_0 E\left(y_b - y_a\right)$$

$$W_{a\to b} = -\left[-q_0 E y_b - \left(-q_0 E y_a\right)\right] = -\left(U_b - U_a\right)$$

$$W_{a\to b} = F\cdot\left(y_a - y_b\right)\cos\pi = q_0 E\left(y_b - y_a\right)$$

$$W_{a\to b} = -\left[-q_0 E y_b - \left(-q_0 E y_a\right)\right] = -\left(U_b - U_a\right)$$

Energia potencjalna ładunku ujemnego *q* w jednorodnym polu elektrostatycznym liczona względem płytki ujemnej (*y* = 0):

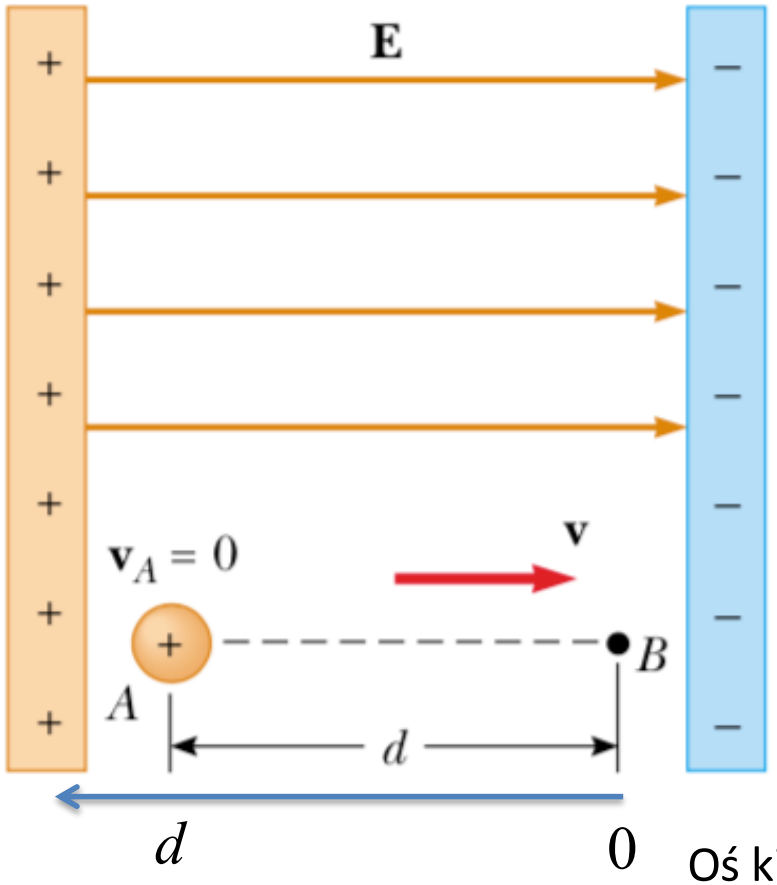
$$U = -q_0 E y$$

Siła elektrostatyczna jest siłą konserwatywną i praca nie zależy od toru, po którym przesuwamy ładunek od punktu *a* do punktu *b*.

Zasada zachowania energii w polu elektrostatycznym

Proton ($m = 1.67\times10^{-27}$ kg, $e = 1.6\times10^{-19}$C) znajdujący się początkowo w spoczynku w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $E = 10^4$ N/C zostaje uwolniony. Proton przebywa drogę $d = 0.1$ m w kierunku pola. Jaką osiągnie prędkość w punkcie B?

Pracę wykonują tylko siły elektrostatyczne – energia cząstki jest zachowana:



$$\frac{1}{2}m_p v_A^2 + U_A = \frac{1}{2}m_p v_B^2 + U_B$$

$$\frac{1}{2}m_p v_A^2 + qEy_A = \frac{1}{2}m_p v_B^2 + qEy_B$$

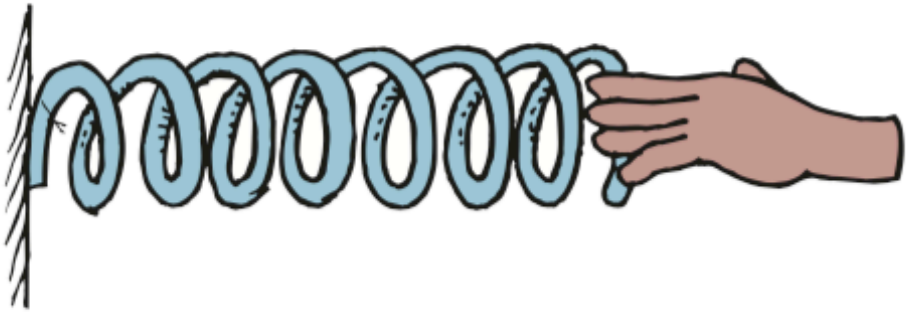
$$0 + qEd = \frac{1}{2}m_p v_B^2 + 0$$

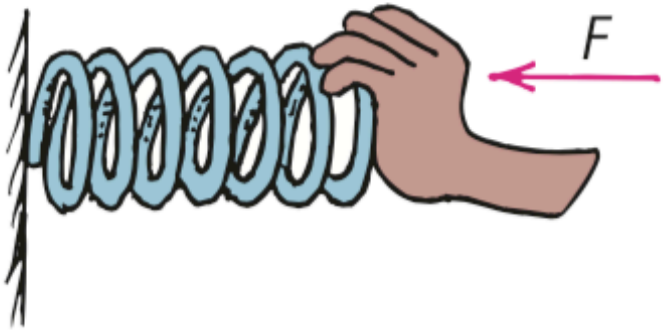
$$v_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m_p}} \approx 4.38\times10^5 \ \mathrm{m/s}$$

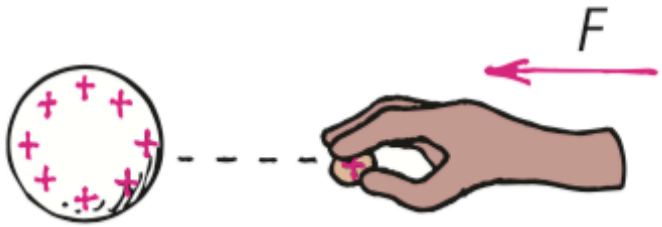
Oś kierujemy w stronę wzrostu energii potencjalnej cząstki

Elektrostatyczna energia potencjalna *U* układu dwóch ładunków punktowych

Żeby zbliżyć do siebie dwa jednoimienne ładunki punktowe trzeba wykonać pracę przeciwko siłą pola nadając ładunkowi energię potencjalną. Podobnie trzeba wykonać pracę przeciwko sile sprężystości aby ścisnąć sprężynę. Wykonana praca jest magazynowana w układzie w postaci energii potencjalnej.



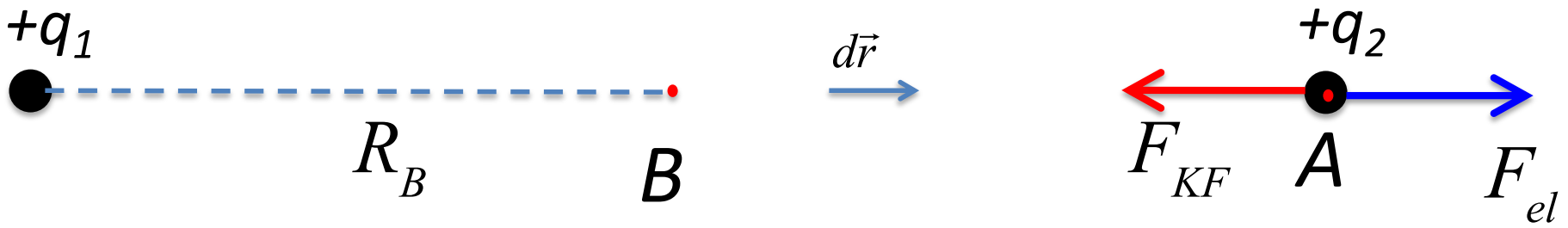




P. G. Hewitt, *Fizyka wokół nas*

Elektrostatyczna energia potencjalna *U* układu dwóch ładunków punktowych (pole niejednorodne)

Praca siły zewnętrznej F_{KF} przy przesunięciu ładunku $+q_2$ z punktu A do punktu B:



$$W_{KF} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{F}_{KF} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_A}^{R_B} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = kq_1q_2 \int_{R_B}^{R_A} \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2 \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right)$$

$$W_{KF} = U_B - U_A$$

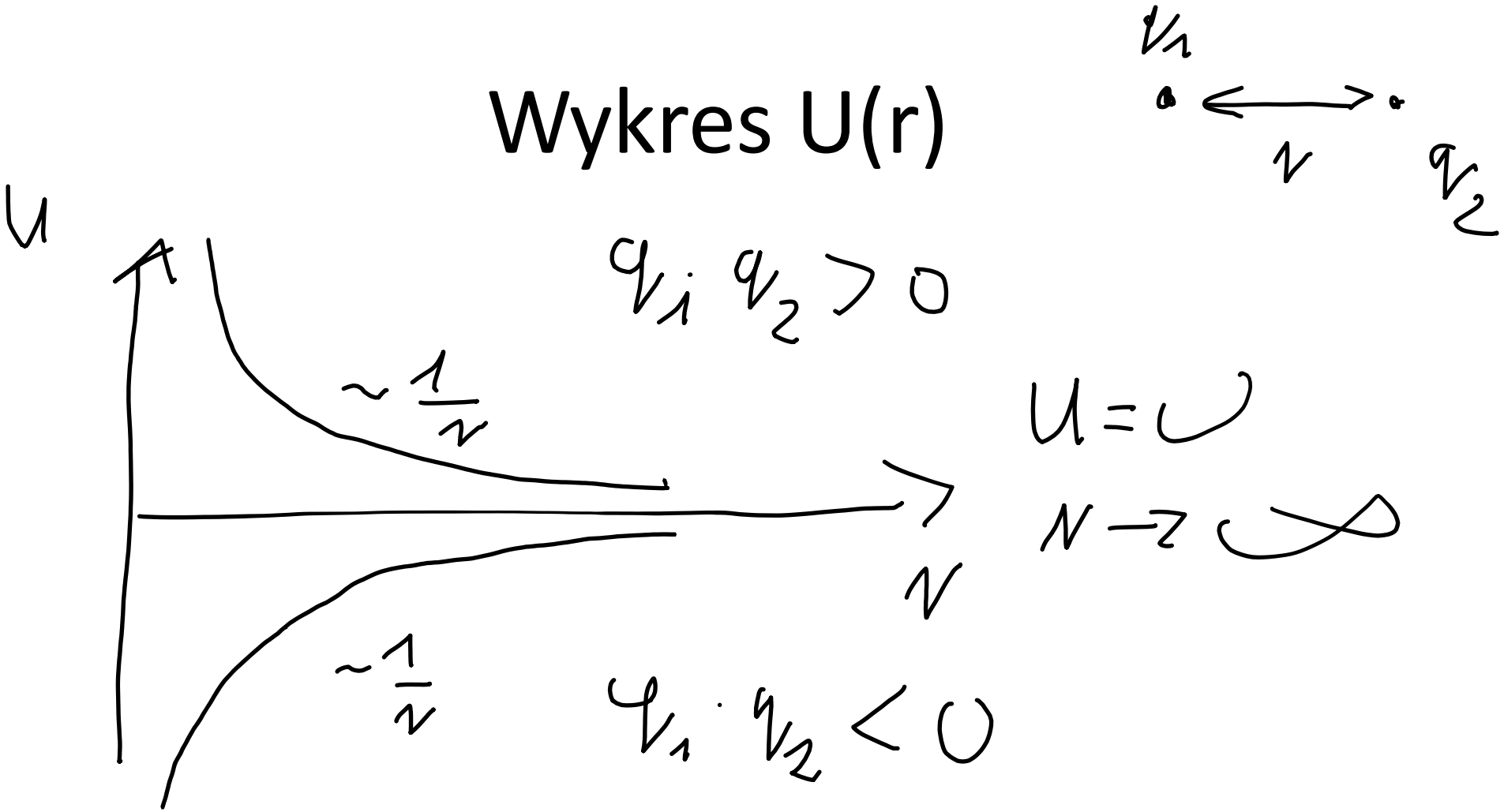
Siła elektrostatyczna jest siłą konserwatywną i praca nie zależy od toru, po którym przesuwamy ładunek od punktu A do punktu B.

Zakładając, że dla $R_A \to \infty$ energia potencjalna $U_A = 0$. Elektrostatyczną energię potencjalną możemy zapisać:

$$U = k\frac{q_1q_2}{R} \quad [J]$$

Elektrostatyczna energia potencjalna układu dwóch ładunków punktowych q_1 i q_2 znajdujących się w odległości R od siebie. Lub inaczej: energia potencjalna ładunku q_2 w polu ładunku q_1 (i na odwrót).

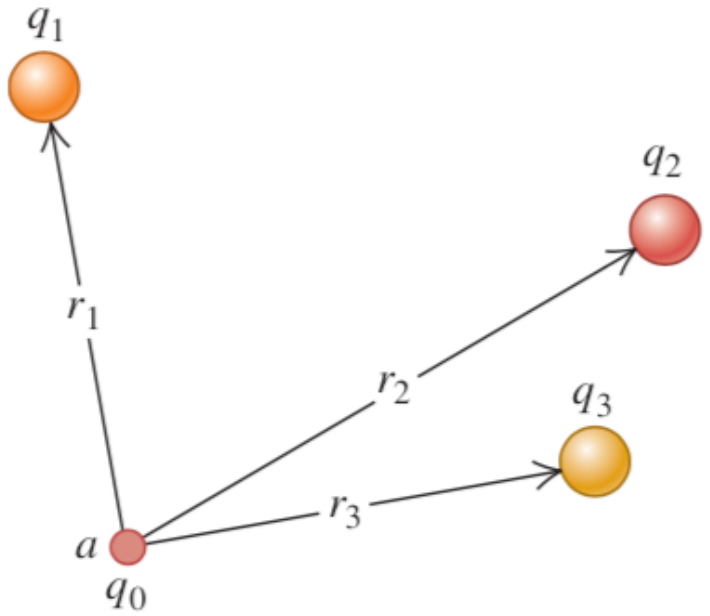
Wykres U(r)



Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku punktowego w polu wielu ładunków punktowych

Energia potencjalna ładunku q_0 w polu innych ładunków:

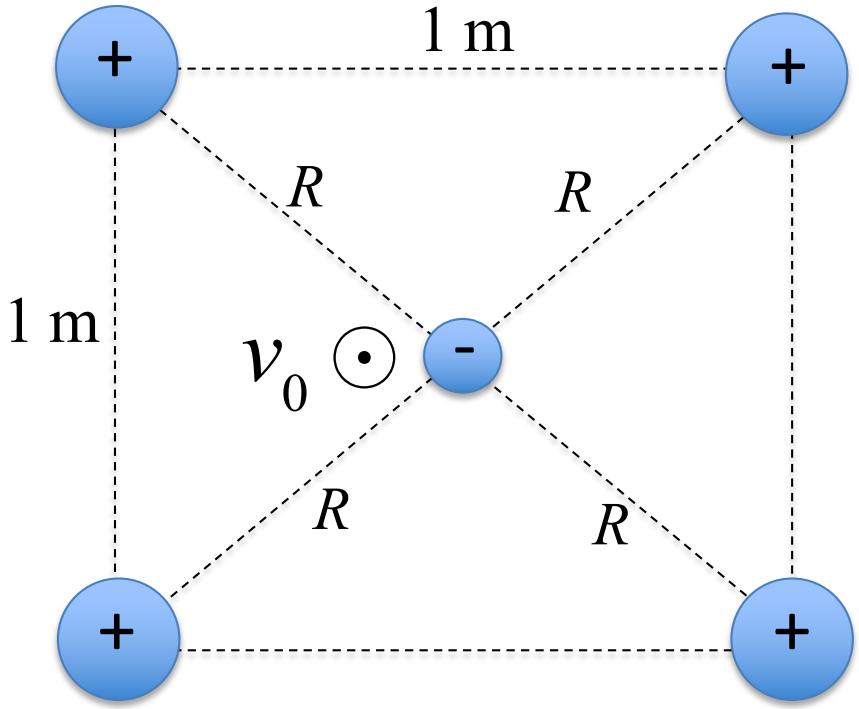
$$U = kq_0\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$



Całkowita energia potencjalna ładunku q_0 jest sumą algebraiczną energii potencjalnych, które q_0 posiada w polu każdego ładunku z osobna.

Zasada zachowania energii w polu elektrostatycznym

Cztery protony umieszczono w wierzchołkach kwadratu o boku 1 m. Jaką minimalną prędkość v_0 musi posiadać elektron, znajdujący się w środku kwadratu, by oddalić się na nieskończoną odległość od ładunków?



Zasada zachowania energii zastosowana do elektronu:

$$\frac{1}{2}m_e v_0^2 + U_0 = \frac{1}{2}m_e v_\infty^2 + U_\infty$$

$$\frac{1}{2}m_e v_0^2 + 4k\frac{e(-e)}{R} = 0 + 0$$

$$v_0 = e\sqrt{\frac{8k}{m_e R}} \approx 53.5 \text{ m/s}$$

$$e = \pm 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$$

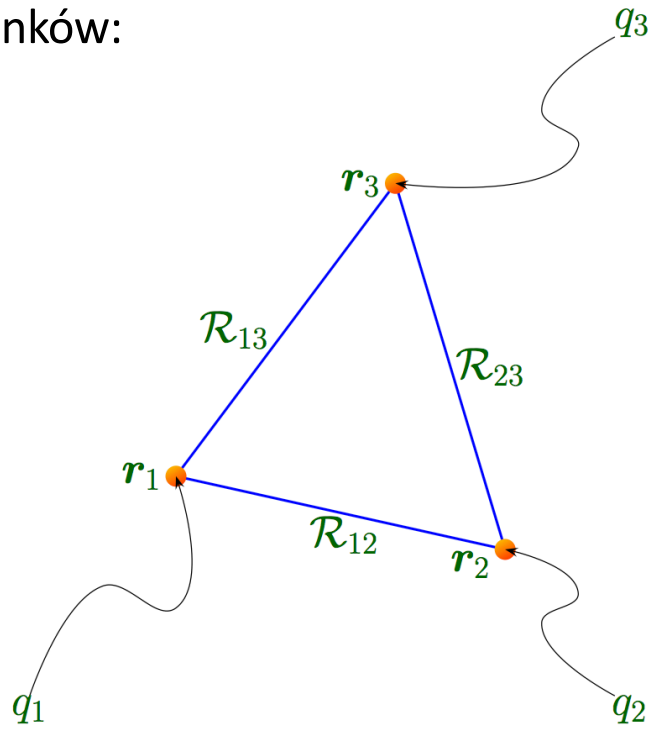
$$m_e = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$$

Elektrostatyczna energia potencjalna zmagazynowana w układzie wielu ładunków punktowych

Zbudowanie każdej konfiguracji ładunku wymaga pracy, która jest magazynowana w całkowitej energii potencjalnej układu.

Przenosimy kolejne ładunki z nieskończoności do punktów $\boldsymbol{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,…

Praca wykonana przy przenoszeniu kolejnych ładunków:



$$W_1 = 0$$ (nie trzeba wykonywać żadnej pracy przeciwko siłom elektrostatycznym, bo jeszcze nie ma ładunków)

$$W_2 = kq_2\left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}}\right)$$

$$W_3 = kq_3\left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}}\right)$$

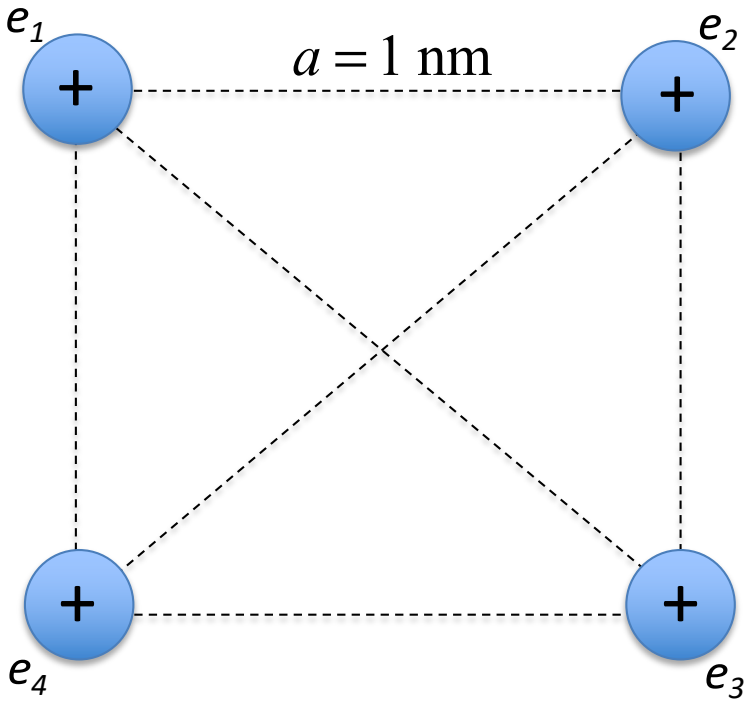
Całkowita praca (= energii potencjalnej układu):

$$U = W_1 + W_2 + W_3 = k\left(\frac{q_1q_2}{\mathcal{R}_{12}} + \frac{q_1q_3}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2q_3}{\mathcal{R}_{23}}\right)$$

Energia zmagazynowana w układzie ładunków

Ile wynosi energia potencjalna zmagazynowana w przedstawionej konfiguracji ładunków (4 protony w rogu kwadratu o boku *a*):

$$e = 1.6 \times 10^{19}\,\mathrm{C}$$



Energia zmagazynowana w układzie:

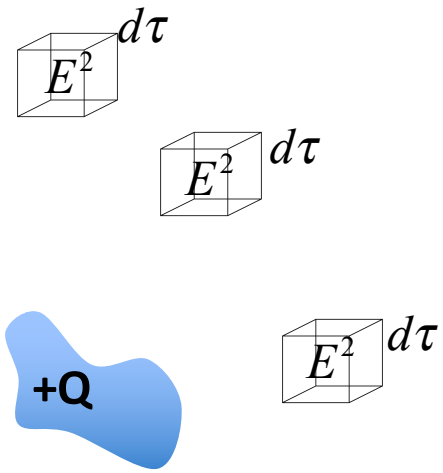
$$U = k\left(\frac{e_1e_2}{a} + \frac{e_1e_3}{a\sqrt{2}} + \frac{e_1e_4}{a} + \frac{e_2e_3}{a} + \frac{e_2e_4}{a\sqrt{2}} + \frac{e_3e_4}{a}\right) = 1.25 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = 7.8\mathrm{eV}$$

*Elektrostatyczna energia potencjalna zmagazynowana w dowolnym ciągłym rozkładzie ładunków

Przepis na wyznaczenie energii potencjalnej dowolnego ciągłego rozkładu ładunków:

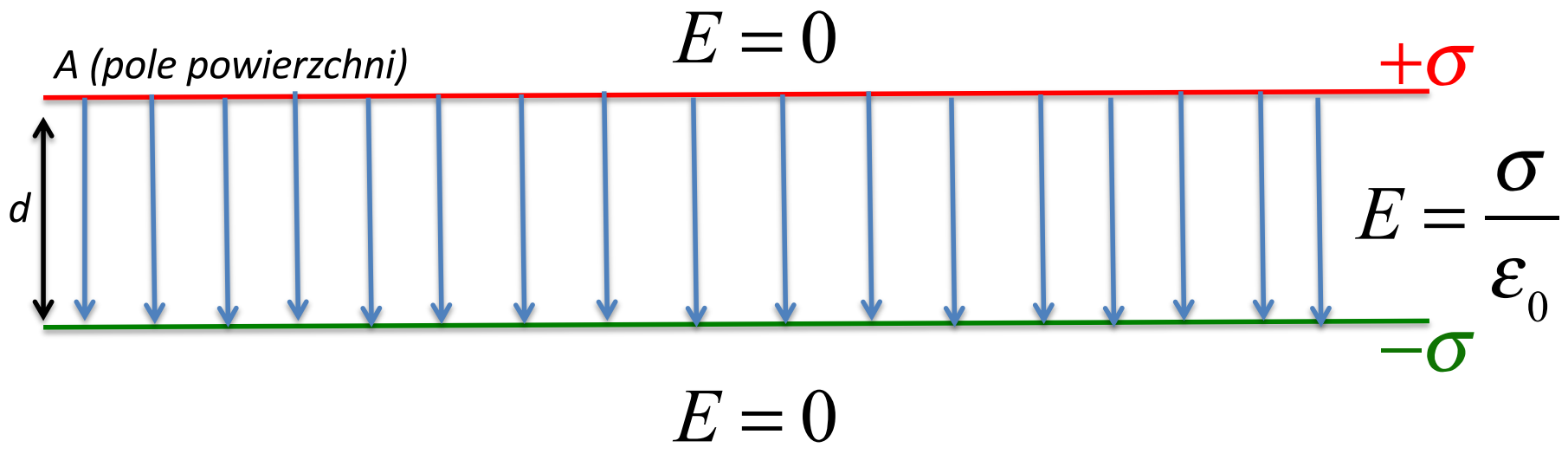
$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{cala \\ przestrzen}} E^2 d\tau$$

całka objętościowa po całej przestrzeni z kwadratu wartości natężenia pola elektrycznego



…. całka ta oznacza sumę kwadratów natężenia pola elektrycznego po każdym punkcie przestrzeni (nieskończenie małym elemencie objętościowym dτ)

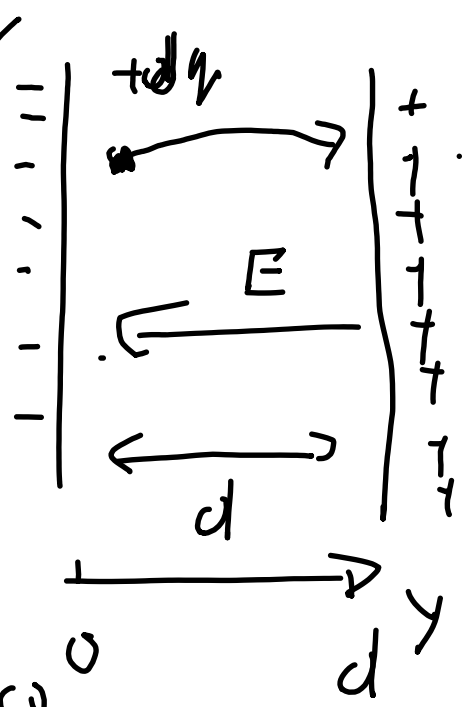
Energia zgromadzona pomiędzy dwoma różnoimiennie naładowanymi płytkami



Elektrostatyczna energia potencjalna zgromadzona w układzie:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{cala \\ przestrzen}} E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \int d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 (Ad) = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} (Ad)$$

A



$$dW = (U_+ - U_-) =$$

$$= (dq)Ed - 0 =$$

$$= (dq)\,\vec{E}\,d = (dq)\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)d =$$

$$= dq\left(\frac{q}{A\varepsilon_0}\right)d$$

$$W = \int_0^Q dW = \frac{d}{A\varepsilon_0}\int_0^Q q\,dq = \frac{d}{A\varepsilon_0}\frac{1}{2}Q^2 =$$

$$= \frac{d}{A\varepsilon_0}(\sigma^2 A^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\sigma^2 A^2 d}{\varepsilon_0 A} = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)}$$

E^2