

Uniwersytet Mikołaja Kopernika  
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej  
Centrum Astronomii

Tomasz Kazimierczak

nr albumu: 210564

Praca licencjacka  
na kierunku astronomia i zastosowania komputerów

Testowanie modelu Przestrzeni  
Dwunastościennej Poincaré jako  
topologicznego modelu Wszechświata

Opiekun pracy dyplomowej  
dr hab. Boudewijn F. Roukema  
Katedra Radioastronomii

Toruń 2010

Pracę przyjmuję i akceptuję

Potwierdzam złożenie pracy dyplomowej

.....  
*data i podpis opiekuna pracy*

.....  
*data i podpis pracownika dziekanatu*

*Przede wszystkim pragnę podziękować mojemu promotorowi, dr. hab. Boudewijnowi F. Roukemie, za poświęcony mi czas, wszelką pomoc oraz rady udzielane przy pisaniu niniejszej pracy. Pragnę również serdecznie podziękować Oli i Paulinie, które przyczyniły się do jej poprawnego językowego i stylistycznego wyglądu.*

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika zastrzega sobie prawo własności niniejszej pracy  
licencjackiej w celu udostępniania dla potrzeb działalności naukowo-badawczej lub  
dydaktycznej*

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>4</b>
1.1	Początki topologii w kosmologii . . . . .	4
1.2	Topologiczne właściwości przestrzeni - podstawy topologii . . . . .	6
1.3	Topologia dla obserwatora . . . . .	8
1.4	Metody obserwacyjne i ich ograniczenia . . . . .	9
1.4.1	Metody 2D . . . . .	11
1.4.2	Metody 3D . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Model Przestrzeni Dwunastościennej Poincaré</b>	<b>15</b>
2.1	Właściwości modelu PDS . . . . .	16
2.1.1	Metoda „dopasowanych okręgów” w zastosowaniu do modelu PDS . . . . .	18
2.2	Orientacja dwunastościanu Poincaré w przestrzeni oraz jego rozmiary . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Obliczenia i testy numeryczne</b>	<b>20</b>
3.1	Program do testowania modelu . . . . .	21
3.2	Wstępne wyniki obliczeń . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>26</b>

# 1 Wprowadzenie

Jaki jest globalny kształt Wszechświata? Czy przestrzeń jest skończona, czy nieskończona? Czy jest zorientowana w jakimś kierunku? Na te oraz podobne pytania stara się odpowiedzieć współczesna kosmologia. Dość częste i popularne jest stwierdzenie, że Ogólna Teoria Względności (OTW) Einsteina zupełnie wystarczy do tego, aby znaleźć odpowiedź na powyższe pytania. Otóż nie jest to prawda. OTW daje jedynie odpowiedź na lokalne właściwości geometrii Wszechświata, takie jak jego krzywizna. Natomiast do określenia globalnych właściwości Wszechświata, takich jak jego topologia, OTW już nie wystarcza. Do tego konieczna jest szersza teoria bądź dodatkowe założenia.

Tutaj z pomocą przychodzi topologia. Badania Kosmicznego Mikrofalowego Promieniowania Tła (ang. *Cosmic Microwave Background (Radiation)*; CMBR lub krócej CMB) wskazują na to, że topologia przestrzeni, czyli kształt Wszechświata, mogą być nietrywialne. Zamiast zwykłej trójwymiarowej nieskończonej przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  może to być na przykład przestrzeń torusa  $\mathbf{T}^3$ , przestrzeń soczewkowa lub Przestrzeń Dwunastościenna Poincaré (ang. *Poincaré Dodecahedral Space*; dalej jako PDS). W świetle nowych odkryć kosmologicznych model PDS budzi coraz więcej zainteresowania wśród kosmologów zajmujących się topologią. Wynika to z tego, iż ów model lepiej tłumaczy niektóre właściwości CMB, choć zdania są podzielone (Key et al., 2007; Niarchou & Jaffe, 2007).

Niniejsza praca stanowi wprowadzenie w temat topologii oraz modelu Przestrzeni Dwunastościennej Poincaré. Koncentrując się na modelu PDS, przedstawię metody, jakimi można zbadać topologię Wszechświata oraz ograniczenia tych metod. Zaprezentuję także własne obliczenia oparte na parametrach modelu przewidywanych przez Roukema et al. (2008a), testujące model za pomocą napisanego przeze mnie programu. Następnie pokażę wyniki tychże obliczeń, aby ostatecznie wyciągnąć wnioski i zarysować ewentualne przewidywania płynące z otrzymanych wyników.

## 1.1 Początki topologii w kosmologii

Fizyczny rozmiar i kształt przestrzeni jest jednym z najstarszych zagadnień kosmologii<sup>1</sup>. Teoria Newtona, która opierała się na nieskończonej trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa  $\mathbf{R}^3$ , dała początek wielu paradoksom, takim jak paradoks Olbersa (tj. ciem-

---

<sup>1</sup> Wprowadzenie historyczne zostało opracowane na podstawie Luminet & Roukema (1999).

ność nocnego nieba<sup>2</sup>) czy problem z warunkami brzegowymi.

Pod koniec XIX wieku matematycy odkryli mnóstwo skończonych przestrzeni nieposiadających jednocześnie brzegów, takich jak na przykład hiper-sfera<sup>3</sup> czy przestrzeń projekcyjna. W 1900 roku Schwarzschild zwrócił na to uwagę, rozważając możliwość posiadania przez Wszechświat nietrywialnej topologii (np. torusa), jednakże nie wzbudziło to większego zainteresowania wśród astronomów. Sytuacja zmieniła się dopiero po 1915 roku, kiedy Einstein ogłosił swoją Ogólną Teorię Względności. OTW opisuje oddziaływania grawitacyjne jako zakrzywienie czasoprzestrzeni, które z kolei jest opisane przez rozkład gęstości materii i energii we Wszechświecie.

W swym statycznym, kosmologicznym rozwiązaniu Einstein zakładał, że przestrzeń jest dodatnio zakrzywioną sferyczną przestrzenią (hiper-sferą). Idąc za myślą Macha i Riemanna, chciał w ten sposób otrzymać model skończonej przestrzeni, ale bez brzegów, aby móc rozwiązać problem nieskończoności Wszechświata. Dzięki temu model Einsteina pozbył się większości paradoksów wynikających z kosmologii Newtona, ale jednocześnie przysporzył innego problemu. Mianowicie piękno i prostota modelu Einsteina oczarowały większość kosmologów do tego stopnia, że stracili oni zainteresowanie innymi geometrycznymi rozwiązaniami przestrzeni i przestali je badać. Ponadto topologia nie zdawała się być głównym zainteresowaniem Einsteina — w swoich artykułach nie wspomina on nic o topologicznych alternatywach dla sferycznego modelu przestrzeni. Po długim czasie, rzec by można, „ciemnych wieków” dla topologii, w ostatnich dwóch dekadach nastąpił jej rozkwit (Starobinskij, 1993; Stevens et al., 1993; Lachieze-Rey & Luminet, 1995). Prawdopodobnie jest to zasługą rozwoju nowych teorii kosmologicznych, w których topologia może odgrywać znaczącą rolę.

Ponieważ równania Einsteina są cząstkowymi równaniami różniczkowymi, opisują one jedynie lokalne właściwości czasoprzestrzeni. Globalny kształt przestrzeni zależy nie tylko od metryki — w głównej mierze zależy on również od topologii i wymaga uzupełniającego podejścia do geometrii różniczkowej Riemanna. Danym rozwiązaniom równań pola odpowiada kilka (a w większości przypadków nieskończona liczba) topologicznie różnych modeli Wszechświata (Luminet & Roukema, 1999). A zatem, jak już wspomniałem, OTW nie rozwiązuje w pełni problemu globalnej struktury czasoprzestrzeni i nie jest w stanie

---

<sup>2</sup> W nieskończonej przestrzeni Euklidesa nieskończona liczba gwiazd powinna dawać nieskończenie jasne niebo, tymczasem niebo nocą jest ciemne (zob. Tipler, 1988).

<sup>3</sup> Tj. trójwymiarowa sfera  $S^3$ .

określić kształtu Wszechświata. Dlatego też konieczne jest uzupełnienie OTW dodatkowymi topologicznymi założeniami lub stworzenie szerszej teorii.

## 1.2 Topologiczne właściwości przestrzeni - podstawy topologii

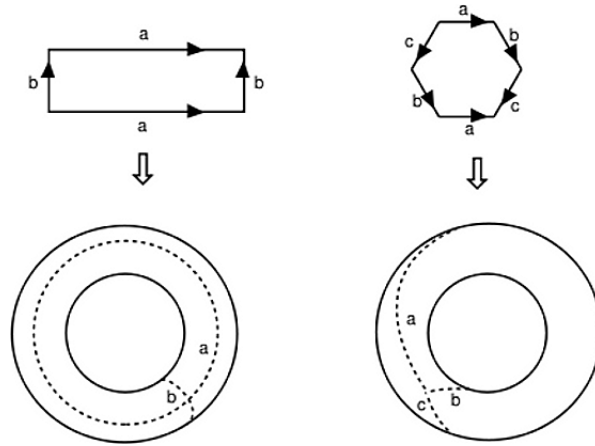
*„Topologia jest to nauka o tych własnościach tworów geometrycznych, które nie ulegają zmianie, gdy twory te poddajemy przekształceniom różnowartościowym i obustronnie ciągłym, czyli homeomorfizmom. Własności takie nazywamy **niezmiennikami topologicznymi**. Na przykład własność okręgu polegająca na tym, że rozcina on płaszczyznę na dwa obszary, jest niezmiennikiem topologicznym; jeśli okrąg przekształcimy w elipsę czy w obwód trójkąta, własność ta zostanie zachowana. Natomiast posiadanie stycznej w każdym punkcie nie jest własnością topologiczną; posiada ją okrąg, nie posiada zaś obwód trójkąta, choć powstaje on z okręgu przez przekształcenie różnowartościowe i obustronnie ciągłe. [...] Topologia operuje pojęciami ogólniejszymi niż analiza; własności różniczkowe danego przekształcenia są dla topologii obojętne, istotna jest ciągłość oraz różnowartościowość. W konsekwencji topologia staje się nieraz przydatna do rozwiązywania zagadnień, którym analiza poddać nie może”* (Kuratowski, 1962, s. 91).

Z powyższego opisu wynika, że jeśli weźmiemy jakąkolwiek rozmaitość, to można ją zgniatć, rozciągać, skręcać itp. i nie zmieni to jej topologii. Natomiast rozcinięcie, robienie dziur czy dodawanie uchwytyów już ją zmienia. Wniosek z tego jest taki, że dla topologii pojęcie takie jak „odległość” nie istnieje<sup>4</sup> (tzn. jest przez nią ignorowana).

Topologia dwuwymiarowych powierzchni (rozmaitości) może być reprezentowana przez wielokąty, których krawędzie boczne są odpowiednio parami utożsamione. Np. połączenie jednej pary boków kwadratu daje nam cylinder. Natomiast zagięcie cylindra i złączenie jego okrągłych końców daje topologię torusa. Rozmaitość o takiej topologii jest zwarta, skończona i zamknięta, podobnie jak zwykła dwuwymiarowa sfera  $S^2$  (Rys. 1).

Kiedy mamy do czynienia z więcej niż dwoma wymiarami, metoda sklejanía brzegów pozostaje najprostszym sposobem wyobrażenia sobie przestrzeni topologicznej. Poprzez analogię do dwuwymiarowego przypadku, trójwymiarowy torus, zwany także *hipertorusem*, jest uzyskiwany w wyniku utożsamienia ze sobą przeciwległych ścian równole-

<sup>4</sup> To wyjaśnia dlaczego OTW nie jest w stanie określić jednoznacznie topologii przestrzeni.



Rys. 1: Konstrukcja torusa z prostokąta i sześciokąta za pomocą odpowiednich identyfikacji boków. Źródło: Luminet & Roukema (1999).

głościanu. Wynikowa objętość jest skończona, lecz jednocześnie daje wrażenie nieskończoności przestrzeni, choć w rzeczywistości przestrzeń jest zamknięta. Dobre wyobrażenie na ten temat dają gry komputerowe typu „wężyk”, w których wchodząc w jedną ścianę wychodzi się z drugiej. Inną analogią, choć nieco mylną, jest pokój, którego ścianami są lustra<sup>5</sup>. Generalnie każda trójwymiarowa zwarta rozmaitość może być przedstawiona jako wielościan, którego ściany są odpowiednio parami utożsamione. W topologii twór taki nosi miano *domeny fundamentalnej* FD (ang. *Fundamental Domain*) — w dalszej części pracy zostanie on dokładniej opisany.

Bardziej skomplikowana zwarta rozmaitość (tj. gdy liczba ścian jej FD jest większa niż osiem) nie może być dalej rozwijana w przestrzeni Euklidesowej  $\mathbf{R}^3$ . Wynika to z geometrii przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  — nie da się dopasować wszystkich kątów w wierzchołkach FD. Natomiast w przestrzeni sferycznej  $\mathbf{S}^3$  lub hiperbolicznej  $\mathbf{H}^3$  nie ma już tego problemu.

Ogólna metoda klasyfikacji topologii danej rozmaitości  $\mathcal{M}$  oraz jej formalne definicje zostały opisane przez Luminet & Roukema (1999) oraz Lachize-Rey & Luminet (1995) i tamże odsyłam czytelnika, który jest zainteresowany wnikliwym przestudiowaniem tego tematu. A dla celów niniejszej pracy przedstawię jedynie podstawową terminologię, którą będę posługiwał się w dalszej części wywodu.

Do opisu topologii rozmaitości  $\mathcal{M}$  służą wspomniane wcześniej *niezmienniki topologiczne*, które mogą przyjmować różne formy. Przykładem takiego niezmiennika jest *grupa podstawowa homotopii*. Grupa podstawowa określa, czy dana rozmaitość jest *jednoospójna*

<sup>5</sup> Analogia ta może być mylna, ponieważ w pokoju z lustrami mamy do czynienia z odbiciem, natomiast w omawianym przypadku nie.



(ang. *simply-connected*), czy *wielospójna* (ang. *multiply-connected*) — czyli definiuje, jaka jest jej topologia. Mówiąc kolokwialnie, terminem *jednospójna* określa się „prostą” topologię, tj. taką bez „dziur” i „uchwyków”. Natomiast drugi termin *wielospójność* wyraża coś zupełnie przeciwnego — to, że grupa podstawowa homotopii jest nietrywialna. Przykładem jednospójnej topologii jest płaska przestrzeń Euklidesa, zaś przykład wielospójnej topologii stanowi np. torus. Do tego opisu dochodzą jeszcze: *uniwersalna przestrzeń nakrywająca*  $\widetilde{\mathcal{M}}$  (ang. *universal covering space*), *grupa holonomii*  $\Gamma$  oraz wspomniana już wcześniej *domena fundamentalna* FD, dając w pełni wystarczający zestaw narzędzi do opisu topologii. *Domena fundamentalna* rozmaitości  $\mathcal{M}$  to największy jednospójny obszar, którego geometryczne właściwości są takie same, jak w uniwersalnej przestrzeni nakrywającej  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . FD zawsze jest wypukła i ma skończoną liczbę ścian. Uniwersalna przestrzeń nakrywająca  $\widetilde{\mathcal{M}}$  to w pewnym sensie „rozwiniecie” oryginalnej rozmaitości  $\mathcal{M}$ . Jest ona z definicji jednospójna, więc gdy  $\mathcal{M}$  jest jednospójna, to jest identyczna ze swoim „nakryciem”  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . Dlatego z praktycznego punktu widzenia jedynie dla wielospójnych rozmaitości określa się  $\widetilde{\mathcal{M}}$ .

Kosmologia, z oczywistych powodów, skupia się głównie na lokalnie jednorodnych, izotropowych i trójwymiarowych przestrzeniach o stałej krzywiznie. A ponieważ każda zwarta rozmaitość  $\mathcal{M}$  ze stałą krzywizną  $k$  może być wyrażona jako iloraz  $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}}/\Gamma^6$ , to uniwersalna przestrzeń nakrywająca  $\widetilde{\mathcal{M}}$  wraz z działającą na nią grupą holonomii  $\Gamma$  definiują właściwą topologię danej rozmaitości. Dla rozmaitości o zerowej krzywiznie (czyli płaskich,  $k = 0$ )  $\widetilde{\mathcal{M}}$  jest płaską przestrzenią Euklidesa  $\mathbf{R}^3$ ; dla rozmaitości o dodatniej ( $k > 0$ ) krzywiznie — sferą  $\mathbf{S}^3$ ; a dla pozostałych, czyli rozmaitości o ujemnej ( $k < 0$ ) krzywiznie — przestrzenią hiperboliczną  $\mathbf{H}^3$ .

### 1.3 Topologia dla obserwatora

Obecnie uważa się, że Wszechświat jest dobrze opisany przez zaburzony model Friedmana - Lemaître’a (*FL*). Model *FL* to jednorodne i izotropowe rozwiązania równań Einsteina, z których przestrzenne części mają stałą krzywiznę. Niejednorodności i anizotropie, które obserwuje się we Wszechświecie, są wymodelowane przez zaburzenie tych rozwiązań. Modele FL, tak jak trójwymiarowe rozmaitości, można podzielić na trzy ogólne klasy

---

<sup>6</sup> Czytelnika bardziej zaciekawionego, dlaczego rozmaitość może być wyrażona jako taki iloraz, odsyłam do artykułów Lachieze-Rey & Luminet (1995) oraz Luminet & Roukema (1999).

(zgodnie ze znakiem ich przestrzennej krzywizny): płaskie, sferyczne i hiperboliczne. Wartości parametrów określających krzywiznę przestrzeni (parametr  $\Omega_{\text{tot}}$  oraz bezwymiarowa stała kosmologiczna  $\Omega_{\Lambda} \equiv c^2 \Lambda / (3H_0^2)$ ) nie są jeszcze wystarczająco dokładnie znane, żeby zdecydować, jaka jest krzywizna przestrzeni. Ponieważ jednak struktury grup holonomii  $\Gamma$  są kompletnie różne dla przypadków  $k = 1, 0, -1$ , niezaprzeczalne odkrycie nietrywialnej topologii podyktuje znak krzywizny przestrzeni. Ponadto warto zauważyć, że „wielospójność przestrzeni zapewni dokładne ograniczenia na parametry metryki niezależnie od kosmologicznej «drabiny odległości»”. Dlatego też „poza jej właściwym udziałem, wielospójność przestrzeni zaoferuje bardzo wydajne narzędzie badawcze w innych aspektach kosmologii obserwacyjnej” (Luminet & Roukema, 1999).

Aby można było obserwacyjnie potwierdzić taką czy inną wielospójną topologię opisującą Wszechświat, musimy mieć możliwość zaobserwowania efektów z nią związanych. Efekty te pojawią się jedynie, gdy wielkości zdefiniowane na rysunku 2 będą mniejsze od rozmiaru obserwowanego Wszechświata, tj. promienia horyzontu  $\mathbf{R}_H$ . Te wielkości, czyli: promień okręgu opisującego FD ( $r_+$ ), promień okręgu wpisanego w FD ( $r_-$ ) oraz najmniejsza odległość (linia geodezyjna) między dwiema „kopiami”<sup>7</sup> obiektu ( $2r_{\text{inj}}$ ), opisują kształt i rozmiary domeny fundamentalnej FD w  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . Jeśli przynajmniej jedna z wielkości przedstawionych na rys. 2 jest mniejsza niż horyzont obserwacyjny, wtedy w zasadzie będzie można zaobserwować „kopie” tego samego obiektu lub regionu emitującego promieniowanie. Oczywiście im mniejsza domena fundamentalna, tym łatwiej będzie można zaobserwować efekt.

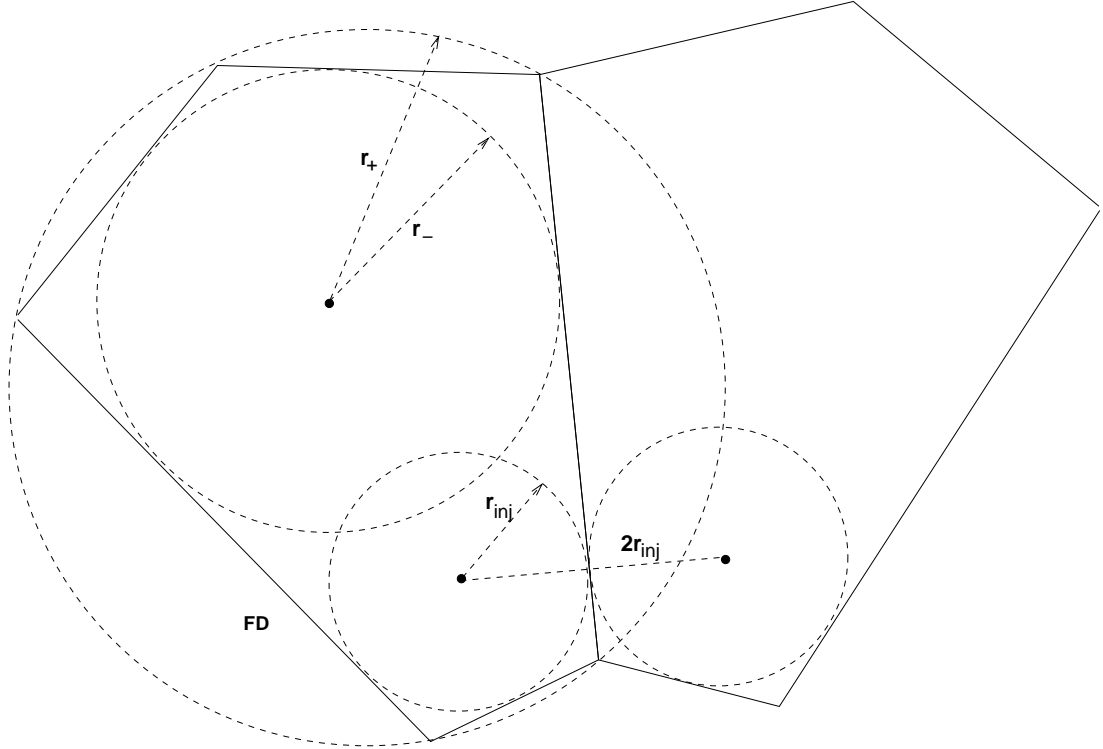
## 1.4 Metody obserwacyjne i ich ograniczenia

Najprostszą metodą do badania kosmologicznej topologii jest rozważanie *sfery obserwacyjnej*<sup>8</sup> razem z domeną fundamentalną FD, w przestrzeni nakrywającej i we współrzędnych współporuszających się. Dla wygody można przyjąć, że „topologia” oznacza konkretną trójwymiarową rozmaitość, wyrażoną w fizycznych jednostkach i z określoną orientacją w standardowym astronomicznym systemie współrzędnych.

W przypadku zerowej krzywizny nie ma żadnych geometrycznych ograniczeń na to,

<sup>7</sup> Słowo „kopia” jest wzięte w cudzysłów aby uwypuklić, iż nie chodzi tu o kopię w normalnym tego słowa znaczeniu.

<sup>8</sup> Tj. sfery o promieniu równym prędkości światła pomnożonej przez wiek Wszechświata. Czyli zgodnie z OTW sfery, spoza której nie zdążyła dotrzeć jeszcze żadna informacja, z powodu ograniczonej prędkości, z jaką we Wszechświecie może poruszać się jakakolwiek cząstka czy promieniowanie.



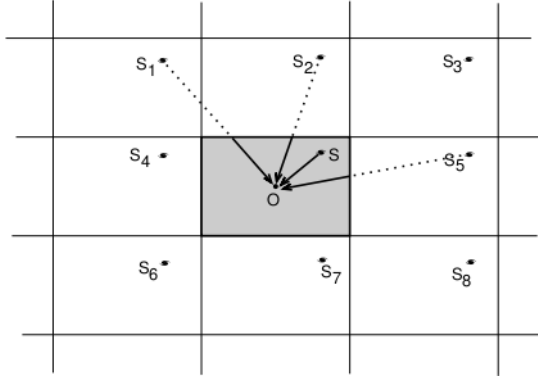
Rys. 2: Schematyczny rysunek pokazujący kluczowe parametry reprezentujące rozmiar topologicznego wszechświata;  $r_-$  to promień największej sfery wpisanej w fundamentalną domenę (FD),  $r_+$  to promień najmniejszej sfery opisanej na FD. Promień  $r_{inj}$  (ang. *injectivity radius*) opisuje najmniejszą odległość (tj. zamkniętą geodezyjną) z jednego topologicznego obrazu do drugiego. Jak widać na powyższym rysunku, ta odległość to  $2r_{inj}$ . Terminologia przyjęta z Luminet & Roukema (1999).

jak dużo „kopii” FD może istnieć wewnątrz sfery obserwacyjnej. Jest jasne, że w sferycznym przypadku „kopii” FD może istnieć tylko ograniczona ilość. Jeżeli zaś chodzi o hiperboliczny przypadek, to sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana. Jednak jako że głównym zainteresowaniem zostanie obdarzony przypadek sferyczny, który jest konieczny aby można było rozważać model PDS, to problem ten nie będzie w niniejszej pracy dalej rozwijany, a zainteresowanego czytelnika odsyłam do lektury artykułu Lachieze-Rey & Luminet (1995). Wspólna zasada dla wszystkich topologii jest taka, że „kopie” obserwowanych obiektów<sup>9</sup> powinny istnieć, jeśli  $r_{inj}$  jest mniejsze od promienia  $R_H$  sfery obserwacyjnej. Dla topologii torusa schematycznie ilustruje to Rys. 3. Dlatego właściwie jedyną możliwością<sup>10</sup> potwierdzenia bądź zaprzeczenia takiej czy innej topologii, jest zaobserwowanie tych „kopii” obiektów, które znajdują się już w sferze obserwacyjnej.

Aby móc łatwo zaobserwować „kopię” jakiegoś obiektu astronomicznego, to obiekt

<sup>9</sup> Gdzie w przypadku CMB „obiettami” są też regiony Wszechświata, których temperatura mikrofalowego promieniowania tła może zostać zmierzona, mimo iż nie są to obiekty w zwykłym astrofizycznym sensie.

<sup>10</sup> Poza wyznaczeniem  $\Omega_{tot}$ ,  $\Omega_\Lambda$  i  $H_0$ , które dają ograniczenie na krzywiznę.



Rys. 3: Powielenie obrazów w uniwersalnej przestrzeni nakrywającej toroidalnego wszechświata. Jeżeli promień sfery obserwacyjnej  $R_H$  jest większy od  $r_{inj}$  — w tym przypadku to odległość między dłuższymi ścianami FD (szary prostokąt) — to teoretycznie istnieje możliwość zaobserwowania „kopii” obiektów. Źródło: Luminet & Roukema (1999).

ten powinien spełniać kilka warunków. Przede wszystkim taki „idealny” obiekt powinien być widoczny na dużych odległościach (oczywiście w skali kosmologicznej). Ponadto powinien nie ewoluować w czasie, mieć zerową prędkość własną oraz promieniować izotropowo. Dodatkowo nie może być przysłonięty przez pył lub dysk galaktyczny. Oczywiście spełnienie jednocześnie wszystkich tych warunków jest bardzo trudne, aczkolwiek istnieją pewne obiekty, które nadają się w mniejszym lub większym stopniu na takie „standardowe świece”. Obiekty, które prawdopodobnie najlepiej spełniają te warunki, to gromady galaktyk, których gorący gaz silnie promieniuje w rentgenie. Niestety gromady te są najczęściej obserwowane na niewielkich (w skali  $R_H$ ) odległościach. Natomiast obiekty, które widać na dużych redshiftach<sup>11</sup>, takie jak kwazary, niestety szybko ewoluują<sup>12</sup>.

Z uwagi na technikę metody wykrywania topologii dzielą się na dwie grupy: metody trójwymiarowe i metody dwuwymiarowe. Do metod trójwymiarowych zalicza się obserwacje dalekich obiektów i badanie korelacji między nimi. Natomiast badanie fluktuacji CMB i korelacji między fluktuacjami temperatury różnych obszarów tego promieniowania to metody dwuwymiarowe. Jedne i drugie, zostaną po krótce opisane w kolejnych podrozdziałach.

#### 1.4.1 Metody dwuwymiarowe

Jeżeli jakiś wielospójny topologiczny model jest poprawny, to istnienie „kopii” regionów przestrzeni we wczesnym Wszechświecie powinno mieć wpływ na fluktuacje CMB

<sup>11</sup>ang. *redshift* – przesunięcie ku czerwieni

<sup>12</sup> Mowa tu oczywiście o ewolucji w skali czasu Wszechświata.

tak samo, jak dany model przewiduje istnienie kopii „zwykłych” obiektów.

Podstawowa zasada, na jakiej opierają się metody 2D, to tak zwana zasada *dopasowanych okręgów* (pierwszy raz opublikowana przez Cornish et al., 1998, 1996). *Powierzchnię ostatniego rozproszenia*<sup>13</sup> (ang. *Surface of Last Scattering*; dalej jako SLS) możemy potraktować w przybliżeniu jako dwuwymiarową sferę, zaś przecięcie tej sfery ze swoją „kopią” tworzy na jej powierzchni okrąg. Jeżeli pojedynczy punkt w przestrzeni w epoce rekombinacji emituje izotropowo promieniowanie (czyli na SLS), to po przebyciu kilkakrotnie wszechświata (tj. przebyciu całej FD kilka razy), promieniowanie powinno dotrzeć do obserwatora z różnych kierunków przestrzeni (Rys. 4). Oczywiście zakładamy, że CMB jest *lokalnie izotropowe* i emitowane promieniowanie skrzyżowania dwóch części SLS ma taką samą średnią temperaturę w różnych kierunkach, a każdy efekt wynikający z ewolucji w czasie na SLS jest taki sam w tych kierunkach.

Zatem według tego, co nakreśliłem powyżej, na powierzchni SLS w zależności od rozmiarów i orientacji FD w przestrzeni powinny istnieć okręgi, których temperatura mikrofalowego promieniowania tła będzie taka sama (Rys. 5). Szerzej tę metodę opiszę w rozdziale 2, stosując ją do modelu PDS.

#### 1.4.2 Metody trójwymiarowe

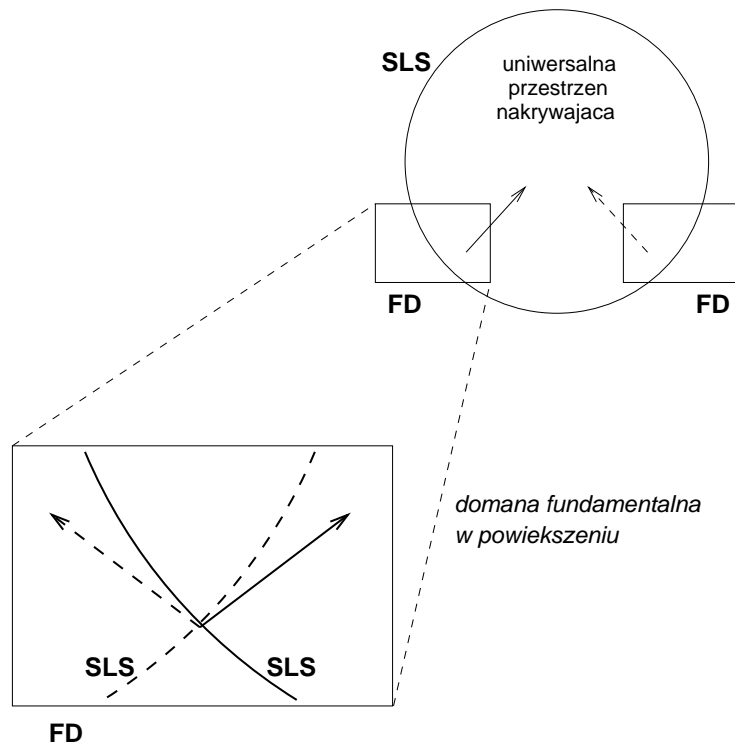
W porównaniu do metod używających do badań CMB, w metodach 3D mamy znacznie większy wachlarz różnorodnych obiektów do wyboru, które dają szansę na zweryfikowanie topologii Wszechświata. Głównymi kandydatami są gromady galaktyk i kwazary. Niestety, istnieje tutaj wiele ograniczeń — a niektóre z nich są dość istotne — co powoduje, że mimo swojej różnorodności i szerokiego zakresu dostępnych obiektów, nie są one tak intensywnie rozwijane, jak badanie anizotropii CMB.

Pierwszym istotnym ograniczeniem jest brak topologicznych „kopii” gromady galaktyk Coma<sup>14</sup> oraz wielkoskalowych struktur Wszechświata, takich jak np. „Wielki Mur”. Z tego powodu szacuje się, że zewnętrzna średnica domeny fundamentalnej  $2r_+$  nie może być mniejsza niż  $60 h^{-1}$  Mpc do  $150 h^{-1}$  Mpc (Roukema & Blanloeil, 1998). Z kolei na więk-

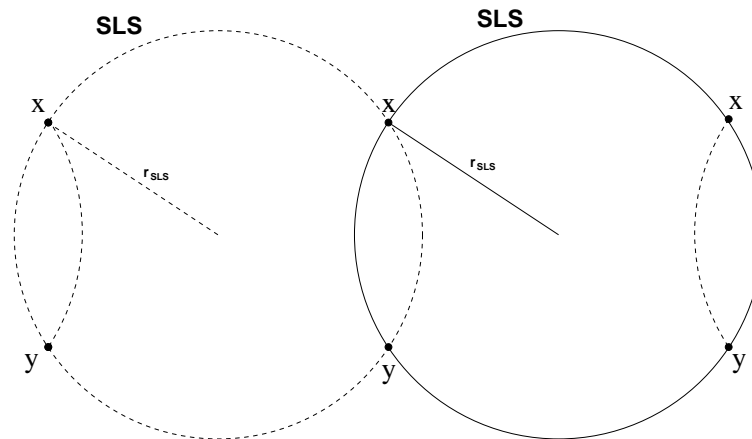
---

<sup>13</sup> Powierzchnia ta jest sferą utworzoną przez obszar w czasoprzestrzeni, z którego dociera do nas mikrofalowe promieniowanie tła, które powstało właśnie w erze rekombinacji.

<sup>14</sup> *Gromada Galaktyk Coma* (znana też jako *Abell 1656* lub *Gromada Warkocza Bereniki*) — gromada galaktyk znajdująca się w konstelacji Warkocza Bereniki w odległości około 320 milionów lat świetlnych od Ziemi. Abell 1656 jest jedną z najgęstszych spośród wszystkich znanych gromad. Zawiera ona tysiące galaktyk. W porównaniu z innymi gromadami znajduje się stosunkowo blisko. Źródło: [http://pl.wikipedia.org/wiki/Abell\\_1656](http://pl.wikipedia.org/wiki/Abell_1656).



Rys. 4: Pojedynczy punkt w przestrzeni w epoce rekombinacji emituje izotropowo promieniowanie, tak że po przebyciu całego wszechświata kilka razy promieniowanie dociera do obserwatora z różnych kierunków. W górnej części obrazka widzimy przestrzeń nakrywającą z kilkoma „kopiami” FD, podczas gdy w dolnej części widzimy w powiększeniu pojedynczą „kopię” FD. Strzałki wskazują drogę, którą przebywają wyemitowane fotony. Rysunek wykonany na wzór Rys. 14 z artykułu Luminet & Roukema (1999), s. 24.



Rys. 5: Rysunek ilustruje zasadę dopasowanych okręgów. Punkty oznaczone tą samą literą, leżące na przecięciach SLS, mają tą samą temperaturę mikrofalowego promieniowania tła. Na rysunku, ponieważ jest dwuwymiarowy, są to tylko punkty przecięcia, ale dla rzeczywistej sfery SLS będą to okręgi na jej powierzchni.

szych odległościach (przekraczających  $R_H/10$ ) jest dużo trudniej znaleźć „kopie” obiektów i nie tylko dlatego, że muszą być bardzo jasne, ale też dlatego, że ewolucja astronomicznych obiektów daje o sobie znać dużo bardziej niż na małych skalach. Ponadto katalogi obserwowanych obiektów również są ograniczone. Szerokie przeglądy nieba sięgają na niewielkie

odległości, zaś „głębokie” przeglądy mają mały kąt obserwacji. Dodatkowo, według zuniifikowanego modelu AGN (ang. *Active Galactic Nuclei*; aktywnych jąder galaktyk), kwazar widoczny z innego kierunku jako topologiczna „kopia” mógłby się nam jawić jako inny – w tym przypadku raczej słabszy — obiekt, np. jako galaktyka Seyferta. Co prawda prawdopodobieństwo tego, że został już zaobserwowany w przeglądach galaktyk na wysokich redshiftach, jest niewielkie, jednak nie jest ono zerowe.

Te ograniczenia powodują, że metody trójwymiarowe jak na razie nie dają zbyt dużych możliwości kosmologom badania topologii Wszechświata. Niemniej jednak, istnienie „unikalnego” obiektu (np. dużo jaśniejszego niż pozostałe z jego klasy) na dużej odległości może nadal być użyteczne w potwierdzeniu lub obaleniu konkretnego modelu topologicznego, albo chociażby w ustaleniu dolnego ograniczenia dla  $r_+$ , zwłaszcza jeśli w przyszłości byłyby dostępne przeglądy całego nieba.

Jednak istnieją metody, w których kosmologowie starają się „obejść” te ograniczenia. Na przykład, aby zredukować problem ewolucji obiektów, stosuje się metody takie jak „kosmiczna krystalografia” lub „poszukiwania lokalnych izometrii”. Jeśli efekty ewolucyjne obiektów danego szerokiego przeglądu nie są duże, to stosuje się kosmiczną krystalografię. W przeciwnym wypadku, gdy „kopie” wielu obiektów widoczne są jedynie dzięki efektom ewolucyjnym, to konieczne jest zastosowanie drugiej metody.

Kosmiczna krystalografia (ang. *cosmic crystallography*) to metoda polegająca na szerokich przeglądach nieba. W skrócie metodę tę można opisać następująco. W danym katalogu obiektów, w którym jest dużo topologicznych obrazów pojedynczych fizycznych obiektów, histogram dla odległości między parami obiektów powinien pokazać wąskie i ostre „piki” wynikające z takiej samej odległości między kopiami jednego obiektu<sup>15</sup>, generowanymi przez powielenie domeny fundamentalnej. Symulacje przeprowadzone przez Lehoucq et al. (1996) pokazują, że ta metoda powinna być wydajna i niezależna od topologii (przynajmniej dla przypadku płaskiej krzywizny). Zastosowanie tej metody do klasycznych katalogów gromad dla przesunięć ku czerwieni  $z \approx 0.25$ , niestety nie pokazało żadnych oczywistych wyników (Marecki et al., 2005).

Druga metoda, tj. poszukiwania lokalnych izometrii (ang. *local isometry search*), została pierwszy raz zaprezentowana przez Roukema (1996) i tamże jest szerzej opisana. Metoda ta polega na poszukiwaniu izometrii pomiędzy dwoma regionami przestrzeni na-

---

<sup>15</sup> Co wynika oczywiście z właściwości nietrywialnej topologii; tzn. wektory przesunięć między odpowiednimi „kopiami” zawsze są takie same.

krywającej, mających rozmiar po mniej więcej kilka setek  $h^{-1}$  Mpc. Zastosowana do katalogu  $N \approx 5000$  kwazarów dla  $z > 1$ , *podwójna izometria*, tj. dwóch par kwazarów ze zbioru pięciu oddzielonych od siebie o więcej niż  $300 h^{-1}$  Mpc, została znaleziona, lecz niekoniecznie świadczy to o istnieniu topologicznych „kopii”.

Poza tymi dwiema metodami istnieje jeszcze metoda wykorzystująca gromady galaktyk, które świecą w promieniach rentgena jako „standardowe świece”<sup>16</sup>. Przedstawione powyżej metody 3D są szerzej opisane przez Roukema & Blanloeil (1998). Jeżeli w przyszłości będą dostępne szersze i głębsze przeglądy nieba, to niewykluczone, że uda się zaobserwować jakieś specyficzne obiekty, które dadzą mocne dowody potwierdzające konkretną topologię Wszechświata.

## 2 Model Przestrzeni Dwunastościennej Poincaré

W 2003 roku Jean-Pierre Luminet i jego koledzy (Luminet et al., 2003) zaproponowali hipotezę modelu przestrzeni dwunastościennej Poincaré jako wyjaśnienie dla danych obserwacyjnych CMB z satelity WMAP (ang. *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*). Stwierdzili oni, że model PDS lepiej dopasowuje się do danych obserwacyjnych, niż pozostałe modele topologiczne (wliczając również prosty, jednopójny, płaski model  $\mathbf{R}^3$ ). Tym samym model ten zwrócił swoją uwagę jako potencjalnie lepszy niż inne topologiczne modele.

Ogólnie rzecz biorąc, fluktuacje mikrofalowego promieniowania tła mogą być wyrażone jako suma sferycznych harmonik. Analogicznie do dźwięku wydawanego przez np. instrument muzyczny, którego barwa zależy od względnego rozkładu zwykłych harmonik, rozkład sferycznych harmonik — widmo mocy — jest pewnego rodzaju „odciskiem” stanu fizycznego i geometrii wczesnego Wszechświata<sup>17</sup>. Porównując dane z WMAP-a z modelem nieskończonej płaskiej przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  i modelem PDS można stwierdzić, iż ten drugi lepiej się dopasowuje do danych obserwacyjnych. Na Rys. 6 wyraźnie widać, że nieskończenie płaski model stoi w konflikcie z danymi obserwacyjnymi dla niskich częstotliwości ( $l = 2$ ; tzw. kwadrupol<sup>18</sup>), natomiast model PDS wręcz przeciwnie. Widmo mocy promieniowania CMB dla modelu PDS zależy, niestety, silnie od parametru  $\Omega_{\text{tot}}$  i aby dopasowywało się

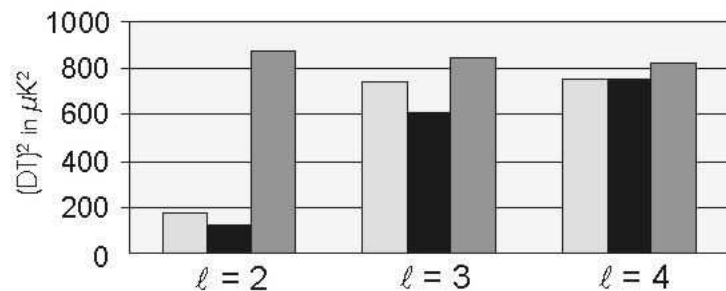
<sup>16</sup> Jeśli oczywiście znamy ich przesunięcie ku czerwieni.

<sup>17</sup>Dlatego też, nie ma co się dziwić, że jest to bardzo przydatne narzędzie badawcze w kosmologii.

<sup>18</sup> $l = 1$ , czyli dipola, nie jesteśmy w stanie zaobserwować, ponieważ ruch układu słonecznego w przestrzeni stwarza sto razy silniejszy sygnał dipola



ono dobrze do danych obserwacyjnych, to  $\Omega_{\text{tot}}$  musi być odpowiednio dobrane. Niemniej jednak, najlepsze dopasowania tego widma, implikujące odpowiednią wartość  $\Omega_{\text{tot}}$ , nie stoją w konflikcie z szacowanym obserwacyjnie  $\Omega_{\text{tot}} = 1.02 \pm 0.02$  (Bennett et al., 2003). Co do wyższych sferycznych harmonik (np.  $l = 900$ ), odpowiadających fluktuacjom temperatury na małych skalach, widmo dla nieskończonego płaskiego modelu (tak samo, jak i dla modelu PDS) dopasowuje się już dużo lepiej.



Rys. 6: Porównanie widma mocy WMAP-a z modelem PDS i modelem nieskończonej płaskiej przestrzeni. Dla niskich częstości ( $l = 2$ ) widma mocy danych z WMAP-a (czarne słupki) model PDS (jasnoszare słupki) dopasowuje się lepiej, niż nieskończony płaski model (ciemnoszare słupki). Źródło Luminet et al. (2003)

Od tego czasu model ten został poddany wielu różnym testom, głównie polegającym na badaniu anizotropii CMB (zob. Cornish et al., 2004; Roukema et al., 2004; Aurich et al., 2005; Caillerie et al., 2007; Lew & Roukema, 2008), ale nie tylko (Roukema, 2009). Na podstawie danych z misji WMAP, została wyliczona też przewidywana orientacja i rozmiary FD dla modelu PDS (Roukema et al., 2008b), którą opisuję w rozdziale 2.2.

Mimo to model PDS nadal nie został ani definitywnie potwierdzony, ani odrzucony (Key et al., 2007). Zatem pytanie, czy nasz Wszechświat posiada topologię przestrzeni dwunastościanu Poincaré, nadal jest otwarte.

## 2.1 Właściwości modelu PDS

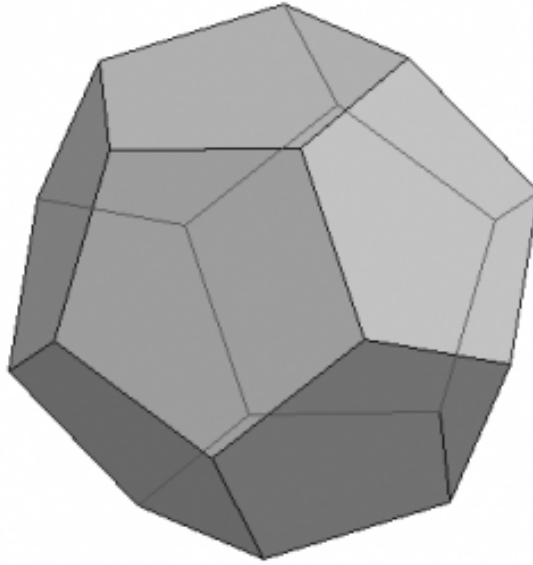
Model PDS posiada szereg ciekawych właściwości, wynikających bezpośrednio lub pośrednio ze swojej egzotycznej topologii. Pierwszą z nich jest kształt domeny fundamentalnej FD modelu. Jest to dwunastościan, którego ściany składają się z pięciokątów foremnych (Rys. 7). Przeciwległe ściany po obróceniu o  $36^\circ$  są ze sobą „sklejone” (utożsamione). Uniwersalna przestrzeń nakrywająca (od ang. *Universal Covering*; dalej jako

UC) w tym przypadku jest trójwymiarową sferą. Poprzez zadziałanie na UC odpowiednią grupą holonomii dostajemy  $S^3$  wypełnioną dokładnie przez 120 dwunastościanów — właściwą topologię modelu<sup>19</sup>.

Druga właściwość, wynikająca bezpośrednio z geometrii modelu, to całkowita objętość przestrzeni. Łatwo jest przewidzieć, nawet bez specjalnej znajomości topologii, że objętość PDS jest 120 razy mniejsza, niż objętość hiper-sfery, na której został zbudowany model:

$$V_{PDS} = \frac{V_{S^3}}{|\Gamma|} = \frac{2\pi^2 R_k^3}{120}, \quad (1)$$

gdzie  $V_{PDS}$  to objętość przestrzeni PDS,  $V_{S^3}$  – objętość hiper-sfery,  $\Gamma$  – grupa holonomii działająca na  $S^3$ , a  $R_k$  to promień hiper-sfery. Ma to niebagatelne znaczenie dla obserwacji, ponieważ oznaczałoby to, że żyjemy w 120 razy mniejszym świecie, niż wynikałoby to z wyznaczenia  $\Omega_{tot}$ , jeśli faktycznie model PDS zostanie potwierdzony obserwacyjnie.



Rys. 7: Domena fundamentalna modelu PDS, czyli dwunastościan foremny składający się z pięciokątów równobocznych. Źródło: [http://www.zgapa.pl/zgapedia/Dwunastościan\\_foremny.html](http://www.zgapa.pl/zgapedia/Dwunastościan_foremny.html).

Transformacja, która opisuje „kopiowanie” obiektu z jednej FD do drugiej w modelu PDS, to tzw. *translacja Clifford*. Jej ciekawą właściwością jest to, że odległość między punktem a jego kopią jest zawsze taka sama, co matematycznie definiuje się następująco:

$$\forall x,y \quad d(x, g(x)) = d(y, g(y)), \quad (2)$$

<sup>19</sup> Zainteresowanych szczegółami dotyczącymi tego, jaka to grupa holonomii i jak formalnie otrzymuje się taką topologię, odsyłam do artykułu Gausmann et al. (2001), w którym został przedstawiony odpowiedni matematyczny formalizm.

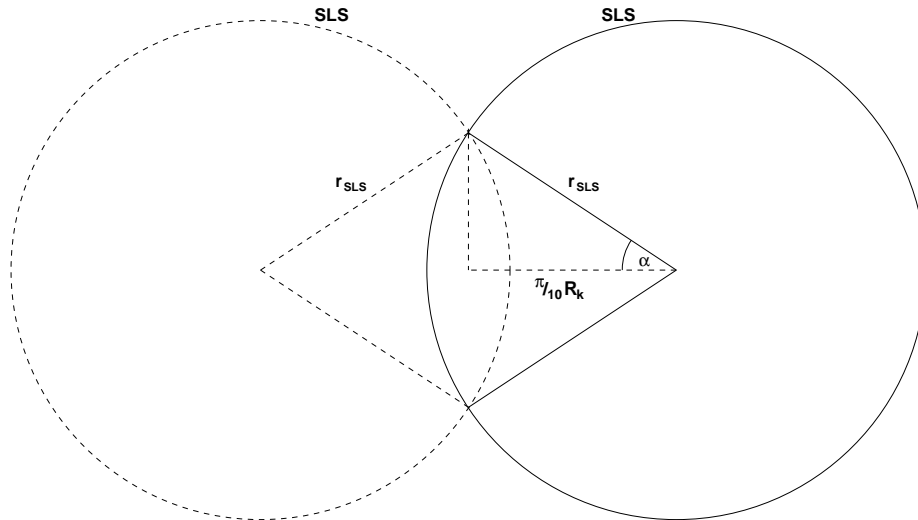
gdzie  $g$  to funkcja transformacji holonomii. Jak widać z równania (2), jeśli umieścimy sferę  $\mathbf{S}^3$ , na której „zbudowaliśmy” PDS, w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa  $\mathbf{R}^4$ , to translację Clifford możemy zdefiniować jako macierz obrotu o wymiarze  $4 \times 4$ . Dokładniej rzecz ujmując, takich macierzy będzie tyle, ile „kopii”  $\text{FD}^{20}$ .

### 2.1.1 Metoda „dopasowanych okręgów” w zastosowaniu do modelu PDS

Opisane we wcześniejszych rozdziałach metody obserwacyjne mają również rzecz jasna zastosowanie do Przestrzeni Dwunastościennej Poincaré. Według modelu PDS, dla opisanej w rozdziale 1.4 metody dopasowanych okręgów, powinno być sześć przeciwległe leżących par okręgów na niebie, jeśli tylko pozwalają na to rozmiary  $\text{FD}$ . Czyli w tym wypadku, aby efekt zaistniał, musi być spełniona nierówność (Rys. 2 i Rys. 5):

$$r_- < r_{SLS}. \quad (3)$$

Wówczas, znając rozmiary kątowe  $\alpha$  tychże okręgów (np. dzięki danym obserwacyjnym z sondy WMAP), można oszacować rozmiary domeny fundamentalnej (Rys. 8).



Rys. 8: Rysunek przedstawia zależność

Z Rys. 8 wynika bezpośrednio poniższe równanie:

$$\text{tg} \frac{r_{SLS}}{R_k} = \frac{\text{tg}(\frac{\pi}{10})}{\cos \alpha}, \quad (4)$$

<sup>20</sup> Czyli 120; wliczona jest też w to transformacja tożsamościowa, mapująca dany obiekt w samego siebie.

które pokazuje ścisłą zależność między rozmiarami okręgów, promieniem powierzchni ostatniego rozproszenia a promieniem krzywizny Wszechświata (Roukema et al., 2008b).

## 2.2 Orientacja dwunastościanu Poincaré w przestrzeni oraz jego rozmiary

Orientację przestrzenną domeny fundamentalnej można otrzymać poprzez zdefiniowanie trzech parametrów  $l$ ,  $b$  i  $\theta$ . Pierwsze dwa ( $l$  i  $b$ ) to współrzędne galaktyczne środka jednej ze ścian dwunastościanu. Trzeci ( $\theta$ ) to kąt, o jaki należy jeszcze obrócić dwunastościan wokół osi skierowanej na  $(l, b)$ , aby uzyskać właściwą orientację. Inną możliwością jest zdefiniowanie czterech parametrów  $l_1, b_1, l_2, b_2$ , będących odpowiednio współrzędnymi galaktycznymi centrów dwóch sąsiadujących ścian FD. W tabeli 1 zebrane są współrzędne wyliczone przez Roukema et al. (2008b) w oparciu o metodę dopasowanych okręgów.

Tab. 1: Współrzędne centrów ścian domeny fundamentalnej dla modelu PDS, oszacowane przez Roukema et al. (2008b). Dla każdej podanej pary współrzędnych  $\{l, b\}_i$  wskazujących kierunek centrum  $i$ -tej ściany, przeciwległe współrzędne wskazują odpowiednią  $(i + 6)$ -tą parę. Współrzędne zostały wyznaczone z dokładnością do około  $2^\circ$ .

$i$	$l$ [ $^\circ$ ]	$b$ [ $^\circ$ ]
1	184	62
2	305	44
3	46	59
4	117	20
5	176	-4
6	240	13

Jeśli natomiast chodzi o określenie rozmiarów FD, to znakomicie do tego nadają się dopasowane okręgi, a ściślej rzecz ujmując, parametr  $\alpha$  opisujący ich rozmiary kątowe (Rys. 8). Doliczając do tego zestawu jeszcze kierunek skrętu będący efektem „kopiowania” obiektu, czyli  $\phi = \pm 36^\circ$ , dostajemy pełen zestaw pięciu lub (w drugim przypadku) sześciu parametrów opisujący domenę fundamentalną w przestrzeni.

### 3 Obliczenia i testy numeryczne

Pierwszym celem moich obliczeń miało być przetestowanie modelu PDS pod kątem możliwości zaobserwowania kopii obiektów na dużych redshiftach, które mogłyby być w niedalekiej przyszłości możliwe do zaobserwowania, biorąc pod uwagę rozwój technologii i powstającą nową aparaturę badawczą (np. SKA<sup>21</sup>); a następnie przeszukanie już istniejących katalogów dalekich obiektów w poszukiwaniu odpowiednich obiektów. Takimi obiektami mogłyby być np. gromady galaktyk lub bardzo jasne kwazary. Dzięki temu dostarczyłoby się mocnych dowodów na potwierdzenie bądź obalenie hipotezy modelu dwunastościanu Poincaré. Zakres moich zainteresowań miał obejmować redshifty od ok. 5–6 do ok. 20–30. Jednakże w trakcie powstawania tej pracy pojawiły się doniesienia, iż dane obserwacyjne zebrane przez satelitę WMAP są źle skalibrowane (Liu et al., 2010). Podejrzewa się, że oficjalne dane z WMAP-a mają błąd kalibracyjny związany z drobnym przesunięciem czasowym (offsetem<sup>22</sup>) w danych pomiarowych, wynikającym z niedokładnego kierunku wskazywanego przez satelitę (Liu et al., 2010; Roukema, 2010a,b).

Według wstępnie przeprowadzonych analiz danych WMAP-a<sup>23</sup>, poprawionych o wspomniany offset przez Roukema (2010b), przypuszcza się, iż najniższe przewidywane redshifty, na których mogłyby się pojawić „kopie” obiektów, są nie mniejsze niż 100 (Rys. 11), co wyklucza możliwość zaobserwowania „kopii” na niskich  $z$ . Zaimplikowało to zmianę mojego głównego celu pracy. Jako że niskie redshifty nie wydają się już być tak bardzo interesujące z naukowego punktu widzenia, postanowiłem sprawdzić, jak zachowują się przewidywania modelu w świetle nowych faktów i porównać je z wcześniejszymi szacunkami.

W związku z tym, używając poprawionych trzyletnich map<sup>24</sup> dla pasma W (94 Ghz) oraz w oparciu o preferowaną orientację modelu PDS, wyliczoną przez Roukema et al. (2008b), policzyłem funkcję korelacji  $\xi_C$  dla kilku różnych wartości  $\alpha$ .

Korzystając ze wzoru (4), można wyliczyć zależności przedstawione na Rys. 10 i 11, dające pewien zarys relacji między kątem  $\alpha$ , określającym rozmiar FD, a promieniem

---

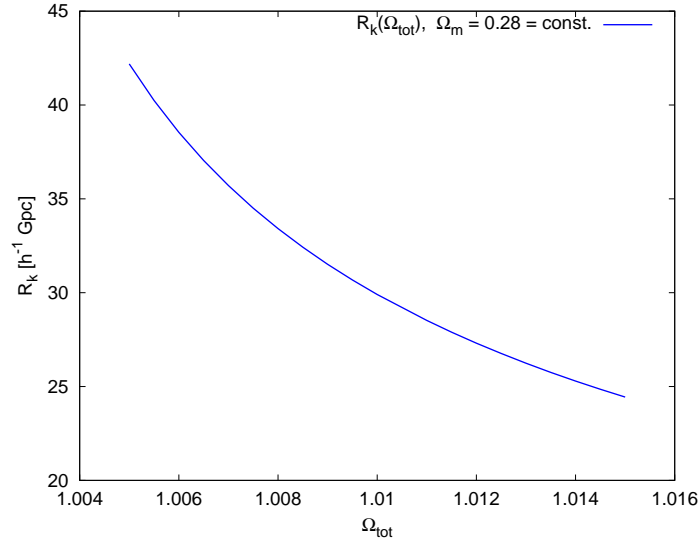
<sup>21</sup> SKA (*Square Kilometre Array*) – nowoczesny radioastronomiczny projekt badawczy, którego rezultatem będzie sieć radioteleskopów na pustyni w Australii lub w Afryce (jeszcze nie podjęto ostatecznej decyzji) o łącznej powierzchni zbiorczej jednego kilometra kwadratowego. Ukończenie budowy SKA przewidywane jest na rok około 2020.

<sup>22</sup> W dalszej części pracy dla wygody będę używał powyższego słowa na określenie błędu w kalibracji.

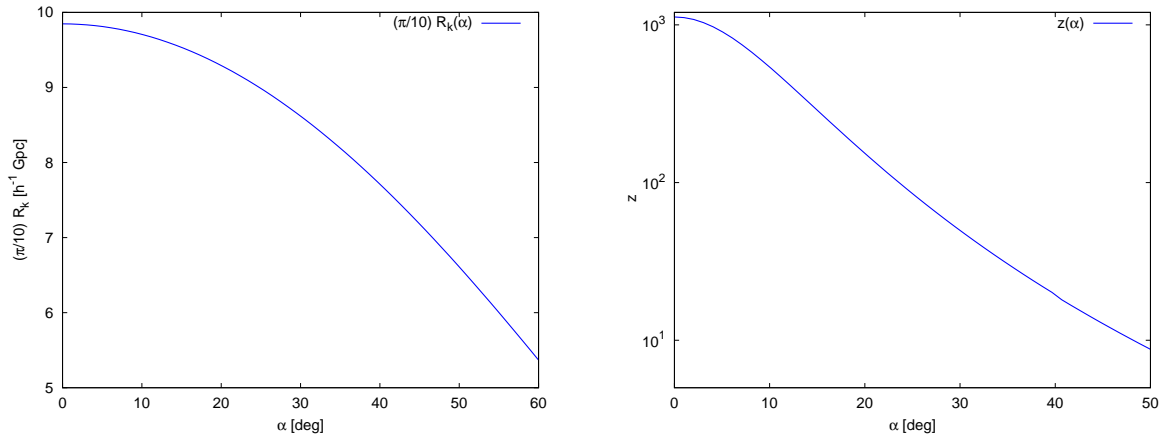
<sup>23</sup> Nienadających się jeszcze na oficjalną publikację.

<sup>24</sup> Zapewnionych przez B. F. Roukeme.

krzywizny czy też redshiftem.



Rys. 9: Wykres zależności promienia krzywizny przestrzeni  $R_k$  od parametru  $\Omega_{\text{tot}}$ . Dla uzyskania różnych wartości  $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ , parametr  $\Omega_\Lambda$  przyjmował zmienne wartości, natomiast parametr  $\Omega_m$  został ustalony na 0.28.



Rys. 10: Wykres zależności  $\frac{\pi}{10} R_k$  od rozmiarów kątowych dopasowanych okręgów  $\alpha$  dla parametrów  $H_0 = 100$ ,  $\Omega_m = 0.28$  i  $\Omega_\Lambda = 0.7312$ . Rys. 11: Wykres zależności redshiftu  $z$  od rozmiarów kątowych dopasowanych okręgów  $\alpha$ , dla parametrów  $H_0 = 100$ ,  $\Omega_m = 0.28$ .

### 3.1 Program do testowania modelu

Podstawowym zadaniem napisanego przeze mnie programu było wyliczanie nowych współrzędnych dla 12 „kopii” obserwowanego obiektu o podanych współrzędnych  $l$ ,  $b$  i  $z$ , gdzie  $l$  i  $b$  to współrzędne sferyczne (w tym wypadku galaktyczne) tego obiektu, a  $z$  to

redshift. Z powodów opisanych we wcześniejszym rozdziale, program został rozszerzony o możliwość czytania plików `fits` oraz wyliczanie funkcji korelacji  $\xi_C$ .

W pierwszym etapie współrzędne wejściowe są przeliczane na wektor współrzędnych w czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa  $\mathbf{R}^4$ :  $(l, b, z) \mapsto (x_0, y_0, z_0, w_0)$ . Dzięki temu można bez problemu wyliczyć 12 nowych pozycji, poprzez wymnożenie początkowego wektora współrzędnych przez odpowiednią macierz obrotu. Schematycznie pokazuje to równanie (5). Tych 12 nowych wektorów to współrzędne „kopii” danego „rzeczywistego” obiektu dla dwunastu przystających „kopii” FD do „bazowej” domeny,

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ w_i \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{M}_i$  to  $i$ -ta macierz wymiaru  $4 \times 4$ . W przestrzeni  $R^4$  taka macierz to macierz obrotu, ale w  $S^3 \subset R^4$  reprezentuje ona określoną holonomię, tj. przekształcenie, które mapuje obiekt w jego „kopię”. Gdy ma się już wyliczone wektory współrzędnych w  $\mathbf{R}^4$ , bez problemu można policzyć odległość między punktami o współrzędnych podanych przez te wektory. Wystarczy policzyć (dla przypadku sferycznego):

$$d_{ij} = R_k \cos^{-1} \left( \frac{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle}{R_k^2} \right), \quad (6)$$

gdzie:  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  to wektory współrzędnych punktów  $i$  i  $j$ ,  $R_k$  to promień krzywizny, zaś  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$  to standardowy iloczyn skalarny tychże wektorów.

W swej ostatecznej wersji program wczytuje z pliku `fits` mapę nieba w postaci tablicy ok. 3 milionów pikseli z wartościami odpowiadającej im temperatury CMB (każdy piksel to konkretna wartość fluktuacji temperatury CMB). Następnie wyliczone zostaje  $N$  losowych pikseli. Każdemu pikselowi odpowiadają konkretne współrzędne galaktyczne  $(l, b)$ , które również zostają wyliczone. Aby nie uwzględniać sygnału z płaszczyzny galaktyki, który nie jest pożądanym ze względu na duży wpływ galaktyki na sygnał CMB, zostało wprowadzone ograniczenie na wybór pikseli:  $|b| > 10^\circ$ . Mając już  $N$  losowych punktów na niebie (z zastrzeżeniem, żeby nie leżały w płaszczyźnie galaktyki), program wylicza odległości między punktami i ich „kopiami” oraz, na podstawie tego, przestrzenną funkcję

korelacji  $\xi_C$ , daną wzorem:

$$\xi_C(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+n}^n \delta T_i \delta T_j(d) \quad (7)$$

W programie wyliczenie zależności  $\xi_C$  od odległości  $d$  zostało rozwiązane w taki sposób, że zakres odległości  $d$  został podzielony na przedziały o rozmiarze  $\Delta d$ , w których następowało zliczanie iloczynów  $\delta T_i \delta T_j(d)$  i uśrednianie wartości  $\langle \delta T_i \delta T_j \rangle$  dla danego przedziału. Program jest napisany w języku C i korzysta z bibliotek COSMDIST oraz ASTROMISC<sup>25</sup>, służących do zaawansowanych obliczeń astronomicznych, a także HEALPIX<sup>26</sup>, używanej do czytania plików z mapami nieba z WMAP-a.

### 3.2 Wstępne wyniki obliczeń

Za pomocą napisanego programu policzyłem funkcje korelacji dla modelu PDS z różnymi wartościami parametru  $\alpha$  oraz dla modelu jednorodnego, używając do tego celu poprawionej oraz „wadliwej” mapy CMB. W obliczeniach użyłem wyliczonej przez Roukema et al. (2008b) sugerowanej orientacji modelu PDS (Tab. 1). Jako że mapy przygotowane przez B. F. Roukema nie są jeszcze oficjalnie opublikowane — zostały jedynie z grubsza poprawione o wspomniany offset — to wykonane przeze mnie obliczenia mają jedynie szacunkowy charakter i należy je traktować jako wstępne wyliczenia, które w późniejszym czasie badań zostaną rozwinięte i usystematyzowane. Ponadto, oszacowania niepewności i błędów obliczeniowych są celowo poniniete, gdyż wymagają one dłuższej analizy. Z tego względu obliczenia i dyskusja błędów będzie przeprowadzona w nieco późniejszym stadium badań.

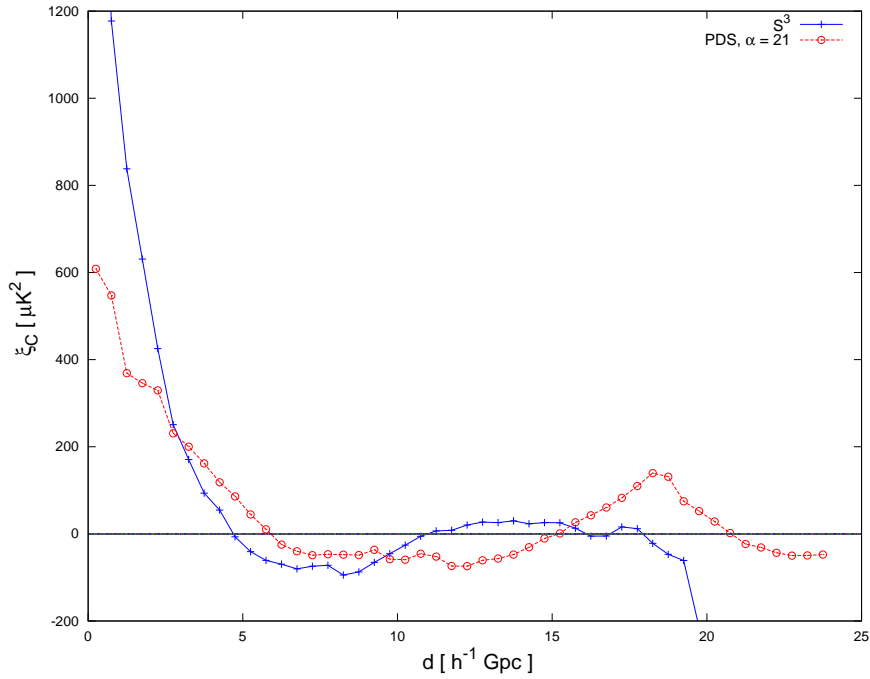
Wyniki są zaprezentowane na Rys. 12, 14, 15 i 16. Dla większości obliczeń liczba  $N$  losowej próbki punktów znajdowała się w zakresie  $5 \cdot 10^4$ – $8 \cdot 10^4$ , jedynie dla Rys. 16 została wybrana większa próbka ( $N = 10^5$ ) aby osiągnąć większą dokładność obliczeń na małej skali.

Na pierwszym rysunku, przedstawiającym wstępne obliczenia (Rys. 12), ukazana jest funkcja kros-korelacji  $\xi_C$  (przerywana linia z okręgami) dla PDS zorientowanego tak, jak to sugerują Roukema, Buliński, Szaniewska, & Gaudin (2008b) (dalej jako RBSG08), oraz

<sup>25</sup> Autor B.F. Roukema; wersje ASTROMISC-0.1.18.2 i COSMDIST-0.2.4.5.

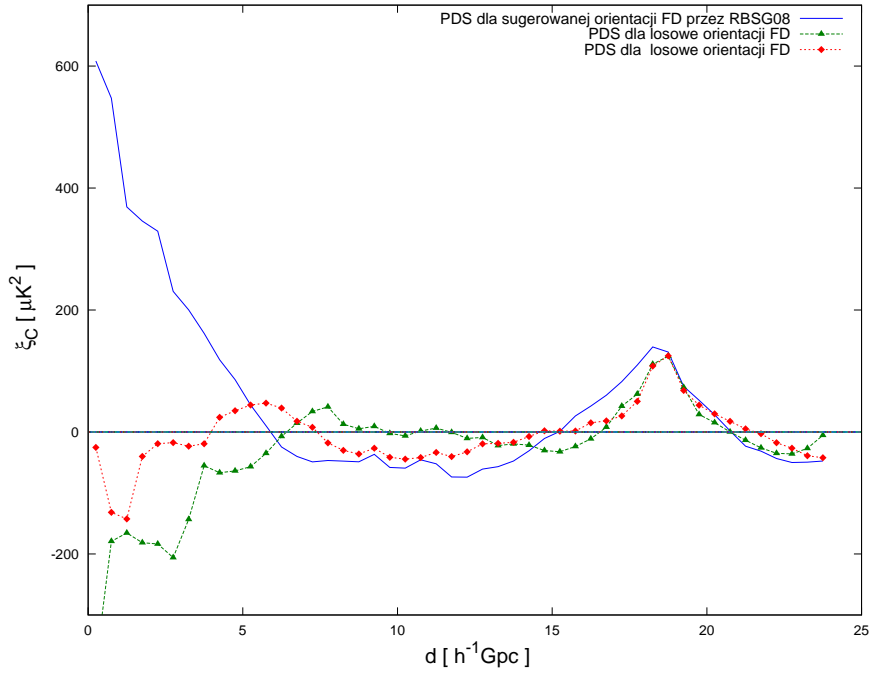
<sup>26</sup> Biblioteka w wersji HEALPIX-2.15A.





Rys. 12: Wykres funkcji  $\xi(d)$  dla parametrów modelu PDS szacowanych przez Roukema et al. (2008b) ( $l = 184^\circ$ ,  $b = 62^\circ$ ,  $\theta = 34^\circ$ ,  $\alpha = 21^\circ$ ); liczba losowo wybranych punktów do obliczeń:  $N = 8 \cdot 10^4$  z zastrzeżeniem na płaszczyznę galaktyki  $|b| > 10^\circ$ . Do wyliczeń zostały użyte poprawione mapy nieba dla danych z satelity WMAP.

funkcja autokorelacji  $\xi_A$  (ciągła linia ze znakami „+” na niej) dla jednorodnej hiper-sfery  $\mathbf{S}^3$ . Porównując oba rezultaty, wyraźnie widać różnice między nimi. Funkcja autokorelacji, jak się dla niej przewiduje, wykazuje bardzo silną korelację jedynie na niewielkiej skali odległości ( $d < 4h^{-1}$  Gpc) między parami punktów, natomiast dla dużej skali odległości ( $d > 5h^{-1}$  Gpc) przeciwnie — korelacja jest zerowa. Wykres funkcji autokorelacji ma jedynie sens fizyczny dla  $d \lesssim 20h^{-1}$  Gpc. Powodem tego jest fakt, że ta odległość jest mniej więcej średnicą sfery obserwacyjnej Wszechświata ( $2R_{SL}$ ), która ogranicza zakres odległości dla funkcji autokorelacji. Wracając do funkcji kros-korelacji na omawianym rysunku, widać podobny efekt dla kros-korelacji na małej skali jak dla autokorelacji, z tym że dużo słabszy. Zgadza się to z przewidywaniami modelu PDS (Rys. 11 Roukema et al., 2008b, s. 13), ponieważ wykazuje to niezerową korelację między fluktuacjami temperatury CMB i „kopiami” na małych skalach ( $d \lesssim 3h^{-1}$  Gpc). Według jednorodnego modelu przestrzeni, bardzo odległe pary punktów na niebie mają średnio bardzo słabą korelację między sobą — widać to wyraźnie na Rys. 12 dla krzywej  $\xi_A$  (dla  $\mathbf{S}^3$ ) w zakresie  $10h^{-1}$  Gpc  $< d < 19h^{-1}$  Gpc. Natomiast według modelu PDS punkty te powinny być



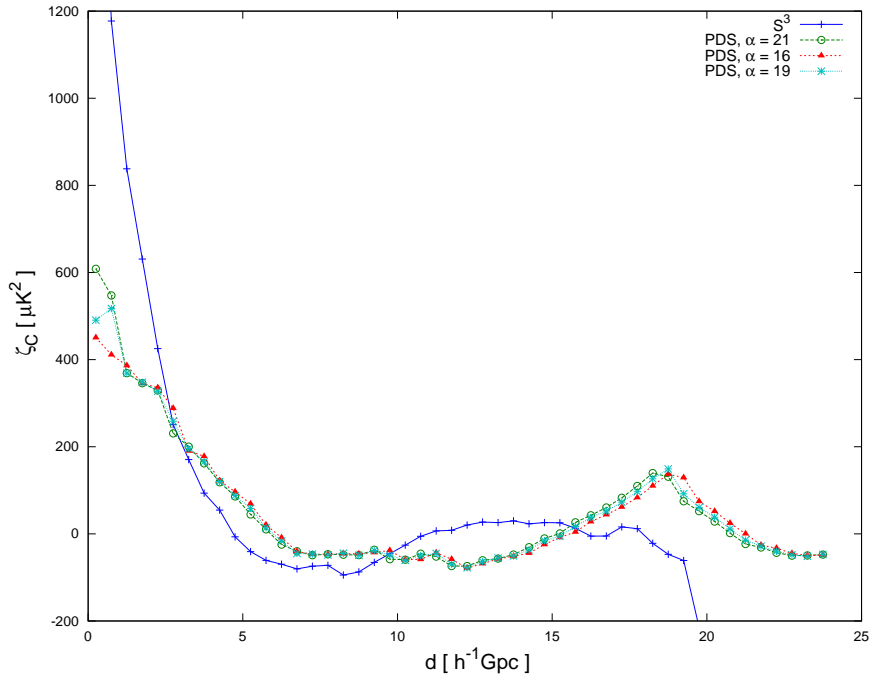
Rys. 13: Ten sam wykres krzywej  $\xi_C$  dla orientacji podanej przez RBSG, jak na Rys. 12 (linia ciągła) i dla porównania dwa wykresy  $\xi_C$  dla losowych orientacji FD (linie przerywane), wykonane również dla poprawionych map i dla  $N = 8 \cdot 10^4$  losowych punktów.

skorelowane ze sobą. Z kolei dla innej „losowo” wybranej orientacji funkcja kros-korelacji jest bardzo słaba. Widać to wyraźnie na Rys. 13, na którym wraz z sugerowaną orientacją przez RBSG08, zamieszczone są dwa wykresy dla dowolnie wybranych orientacji domeny fundamentalnej w przestrzeni. Fakt ten przemawia na korzyść orientacji podanej przez RBSG08.

Następnie na Rys. 12, jak i również na pozostałych rysunkach przedstawiających funkcję  $\xi_C$  można zauważyć, że dla odległości równych rozmiarom  $d \lesssim 18h^{-1}$  Gpc  $\xi_C$  wzrasta nieco powyżej zera, co jest wynikiem tego, że dla takich odległości funkcja kros-korelacji zachowuje się trochę jak funkcja autokorelacji. Wynika z tego, że wykorzystana do obliczeń numerycznych metoda daje poprawne wyniki.

Trzeci rysunek (Rys. 14) pokazuje funkcje  $\xi_C$  dla trzech wartości parametru  $\alpha$ . Są one do siebie bardzo podobne, lecz z drobnymi różnicami, widocznymi przede wszystkim dla  $d < 2.5h^{-1}$  Gpc. Z rysunku można wnioskować, że im mniejsze są rozmiary kątowe dopasowanych okręgów tym mniejsza jest  $\xi_C$  dla PDS na małych odległościach  $d$ .

Ponadto na Rys. 14 widać również taki sam efekt powstania lokalnego maksimum  $\xi_C$  dla  $d \approx 18h^{-1}$  Gpc jak na Rys. 12, ale dodatkowo widoczna jest zależność między rozmia-



Rys. 14: Wykres wyliczonych funkcji  $\xi_c(d)$  dla trzech wartości ( $16^\circ$ ,  $19^\circ$  i  $21^\circ$ ) parametru  $\alpha$ . Dla porównania została podana też funkcja  $\xi_A$  dla przestrzeni jednorodnej. W obliczeniach użyto poprawionej mapy nieba.

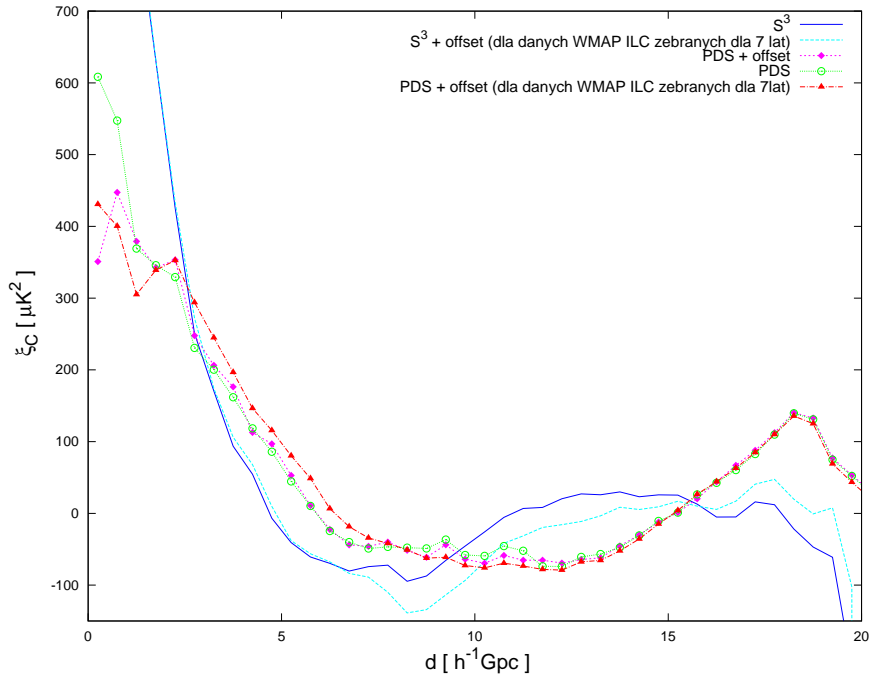
rami FD a kątem  $\alpha$  wynikająca z równania (4) i przedstawiona na Rys. 10 - maksimum zmienia swoje położenie w zależności od kątowych rozmiarów dopasowanych okręgów.

Pozostałe dwa rysunki ( tj. Rys. 15 i Rys. 16), uwiadcniają jakie są różnice pomiędzy funkcjami korelacji policzonymi dla poprawionych map (przerywana linia z okręgami) i ich odpowiednikami policzonymi dla niepoprawionych map (przerywana linia z trójkątami). Różnice, choć nie takie duże to jednak bezsprzecznie zauważalne, są przede wszystkim między funkcjami  $\xi_C$ .

## 4 Podsumowanie

Biorąc pod uwagę szacunkową wartość poprawionych map<sup>27</sup> można zauważyć różnice, lecz za wcześnie jeszcze na wyciąganie ostatecznych wniosków. Jak już wspomnianełem w poprzednim rozdziale, przeprowadzone przeze mnie obliczenia są jedynie wstępnymi testami i aby móc orzec jak mocno błąd kalibracji danych z satelity WMAP wpływa

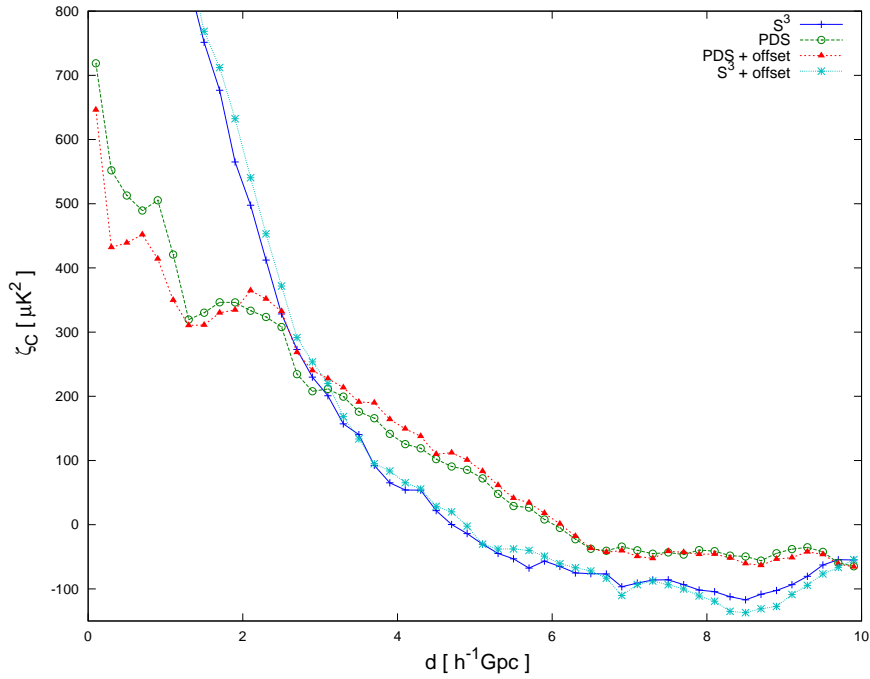
<sup>27</sup> Szacunkową, ponieważ błąd został jedynie z grubsza poprawiony i mapy te są poprawne jedynie dla dużych  $d$ . Dla małych wartości odległości  $d$  mapy są nieostre, co implikuje niedokładność funkcji korelacji na małych skalach – rzędu  $d \lesssim 0.02h^{-1}$  Gpc.



Rys. 15: Wykres przedstawia porównanie poprawionych danych ( $\delta t = 0$ , według konwencji z Roukema (2010b)) z danymi z dodatkowym błędnym offsetem (tzn.  $\delta t = 0.5$ , trzymając się konwencji) w kalibracji przeprowadzone dla parametrów:  $l = 184^\circ$ ,  $b = 62^\circ$ ,  $\theta = 34^\circ$ ,  $\alpha = 21^\circ$ . Na rysunku słowo „offset” oznacza tę błędną kalibrację (tj.  $\delta t = 0.5$ ).

na niekorzyść modelu PDS wymagana jest dokładna systematyczna analiza. Jednakże, już teraz można śmiało stwierdzić, iż błąd ten na pewno ma wpływ istotny wpływ na właściwości prezentowanych map przez grupę WMAP, którego nie można zbagatelizować, mając na uwadze badania, które się prowadzi w oparciu o nie.

Reasumując, w świetle nowych danych doświadczalnych, otrzymane wyniki są spójne z obliczeniami i przewidywaniami grupy RBSG08, w ramach poczynionych tu obliczeń.



Rys. 16: Jak na Rys. 15 tylko na mniejszej skali i ze zwiększoną liczbą losowych punktów ( $N = 100000$ ), w celu otrzymania większej dokładności.

## Literatura

- Aurich, R., Lustig, S., & Steiner, F. 2005, *Classical and Quantum Gravity*, 22, 2061, [arXiv:astro-ph/0412569]
- Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Spergel, D. N., Tucker, G. S., Wollack, E., Wright, E. L., Barnes, C., & Greason. 2003, *apjs*, 148, 1, [arXiv:astro-ph/0302207]
- Caillerie, S., Lachièze-Rey, M., Luminet, J., Lehoucq, R., Riazuelo, A., & Weeks, J. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 476, 691, [arXiv:0705.0217]
- Cornish, N., Spergel, D., & Starkman, G. 1996, *ArXiv Astrophysics e-prints*, [arXiv:gr-qc/9602039]
- Cornish, N. J., Spergel, D. N., & Starkman, G. D. 1998, *Classical and Quantum Gravity*, 15, 2657
- Cornish, N. J., Spergel, D. N., Starkman, G. D., & Komatsu, E. 2004, *Physical Review Letters*, 92, 201302, [arXiv:astro-ph/0310233]

- Gausmann, E., Lehoucq, R., Luminet, J., Uzan, J., & Weeks, J. 2001, *Classical and Quantum Gravity*, 18, 5155, [arXiv:gr-qc/0106033]
- Key, J. S., Cornish, N. J., Spergel, D. N., & Starkman, G. D. 2007, *prd*, 75, 084034, [arXiv:astro-ph/0604616]
- Kuratowski, K. 1962, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Biblioteka Matematyczna Tom 9 (Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe), podręcznik do topologii
- Lachieze-Rey, M., & Luminet, J. 1995, *Physics Reports*, 254, 135, [arXiv:gr-qc/9605010]
- Lehoucq, R., Lachieze-Rey, M., & Luminet, J. P. 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 313, 339, [arXiv:gr-qc/9604050]
- Lew, B., & Roukema, B. 2008, *A&A*, 482, 747, [arXiv:0801.1358]
- Liu, H., Xiong, S., & Li, T. 2010, ArXiv e-prints, [arXiv:1003.1073]
- Luminet, J., & Roukema, B. F. 1999, in *NATO ASIC Proc. 541: Theoretical and Observational Cosmology*, 117–+
- Luminet, J., Weeks, J. R., Riazuelo, A., Lehoucq, R., & Uzan, J. 2003, *Nature*, 425, 593, [arXiv:astro-ph/0310253]
- Marecki, A., Roukema, B. F., & Bajtlik, S. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 435, 427, [arXiv:astro-ph/0412181]
- Niarchou, A., & Jaffe, A. 2007, *Physical Review Letters*, 99, 081302, [arXiv:astro-ph/0702436]
- Roukema, B. F. 1996, *M.N.R.A.S.*, 283, 1147, [arXiv:astro-ph/9603052]
- Roukema, B. F. 2009, *International Journal of Modern Physics D*, 18, 2237, [arXiv:0905.2543]
- Roukema, B. F. 2010a, ArXiv e-prints, [arXiv:1004.4506]
- Roukema, B. F. 2010b, ArXiv e-prints, [arXiv:1007.5307]

- Roukema, B. F., & Blanloeil, V. 1998, *Classical and Quantum Gravity*, 15, 2645, [arXiv:astro-ph/9802083]
- Roukema, B. F., Buliński, Z., & Gaudin, N. E. 2008a, *Astronomy & Astrophysics*, 492, 657, [arXiv:0807.4260]
- Roukema, B. F., Buliński, Z., Szaniewska, A., & Gaudin, N. E. 2008b, *Astronomy & Astrophysics*, 486, 55, [arXiv:0801.0006]
- Roukema, B. F., Lew, B., Cechowska, M., Marecki, A., & Bajtlik, S. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 423, 821, [arXiv:astro-ph/0402608]
- Starobinskij, A. A. 1993, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 57, 622, [arXiv:gr-qc/9305019]
- Stevens, D., Scott, D., & Silk, J. 1993, *Phys. Rev. Lett.*, 71, 20
- Tipler, F. J. 1988, *Journal for the History of Astronomy*, 19, 284