Zbirka zadań z fizyki

Zbiór z rozwiązaniami

I Mechanika

Katedry Didaktiky Fyziky
Matematicko-Fyzikální Fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Zakład Dydaktyki Fizyki
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Zbirka zadań z fizyki

Zbiór z rozwiązaniami
I Mechanika

Zbiór i opracowanie dydaktyczne
Zdeňka Koupilová i Dana Mandíková

Wersja polska: Krzysztof Rochowicz

Zbirka zadań z fizyki.

Zbiór z rozwiązaniami. I Mechanika

Zbiór i opracowanie dydaktyczne

RNDr Zdeňka Koupilová, Ph.D i RNDr Dana Mandíková, M.Sc.

Wersja polska: Dr Krzysztof Rochowicz

Materiały dydaktyczne Zakładu Dydaktyki Fizyki UMK

Katedry Didaktiky Fyziky, Matematicko-Fyzikální Fakulta, Univerzita Karlova v Praze

Opracowanie do druku
Zakład Dydaktyki Fizyki
Instytut Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Grudziądzka 5, 87 – 100 Toruń
Tel: (056) 61-13-291, fax: (056) 62-25-397

Współpraca:
mgr Krzysztof Służewski
dr Andrzej Karbowski
dr Kamil Fedus
mgr inż. Dorota Stolarz
prof. dr hab. Grzegorz Karwasz

Tłumaczenia: Zakład Dydaktyki Fizyki UMK

Okładka: Krzysztof Służewski

Skład:
Krzysztof Rochowicz
Krzysztof Służewski

Korekta: Andrzej Karbowski

Rysunki: Katedra Didaktiky Fyziky MFF UK i ZDF UMK

Koordynacja: Grzegorz Karwasz

Zakład Dydaktyki Fizyki UMK, Toruń, grudzień 2013

Druk – Wydawnictwo Naukowe UMK

Spis treści

Część I – zadania dla gimnazjalistów
Kinematyka

1.1. Gajowy i pies

Gajowy wraca równym krokiem, z prędkością 5 km/h z patrolu w lesie do swojej leśniczówki odległej o 500 m. W czasie powrotu do domu jego pies, który siedział w tym czasie w leśniczówce, biega cały czas od leśniczówki do swojego pana i z powrotem z prędkością 18 km/h dopóty, dopóki gajowy nie dojdzie do domu. Jaką drogę pokona pies zanim gajowy dojdzie do swojej leśniczówki?

<u>Podpowiedź 1</u> Wypisać dane, które znamy z zadania.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Odległość gajowego od leśniczówki wynosi: L = 500 m
Prędkość, z jaką biega pies wynosi: v_p = 18km/h
Prędkość, z jaką gajowy wraca do domu wynosi: v_g = 5km/h

<u>Podpowiedź 2</u> Jak długo biegnie pies? Jak długo będzie biegł pies od leśniczówki do gajowego i z powrotem?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Tak długo, jak długo będzie wracał do leśniczówki gajowy.

<u>Podpowiedź 3</u> Czas wędrówki gajowego. Spróbuj obliczyć, jak długo będzie szedł gajowy do swojej leśniczówki.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Czas wędrówki gajowego do swojej leśniczówki jest taki sam, jak czas, w którym pies biegnie od leśniczówki do gajowego i z powrotem.
Zatem:

$$t_g = t_p = t$$

Można więc obliczyć, jak długo gajowy będzie szedł do leśniczówki:

$$t = \frac{L}{v_g}$$

Podstawiając do wzoru wartości liczbowe mamy:

$$t = \frac{0,5km}{5\frac{km}{h}} = 0,1h = 6minut$$

<u>Podpowiedź 4</u> Droga, którą pokonał pies zanim gajowy doszedł do swojej leśniczówki. Jaką drogę przebiegł pies w czasie 6 minut?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Wiemy, jak długo i z jaką prędkością biegnie pies. Zatem drogę, jaką przebiegnie liczymy ze wzoru:

$$s = v_p t$$

Podstawiając dane liczbowe mamy:

$$s_p = 18\frac{km}{h} \cdot 0,1h = 1,8km$$

<u>Odpowiedź</u>
W czasie, w którym gajowy szedł do leśniczówki, pies przebiegł 1,8 km.

1.2. Średnia prędkość samochodu

Prędkość samochodu na stromej równi pod górę jest równa v_1 = 30 km/h, a przy zjeździe z niej prędkość ta jest równa v_2 = 90 km/h. Jaka jest średnia prędkość tego samochodu?

<u>Podpowiedź 1</u> Czas potrzebny do wjazdu i zjazdu z równi. Samochód przebył taką samą drogę w pierwszym i drugim przypadku, czyli jak wjeżdżał i zjeżdżał z równi. Zatem $s_1 = s_2 = s$

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Czas t_1 potrzebny do jazdy pod górę będzie liczony ze wzoru:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}$$

Czas t_2 potrzebny do zjazdu z równi liczony będzie ze wzoru:

$$t_2 = \frac{s}{v_2}$$

<u>Podpowiedź 2</u> Średnia prędkość samochodu. Należy pamiętać, że średnia prędkość samochodu to nie średnia arytmetyczna prędkości v_1 *oraz* v_2.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Średnia prędkość to całkowita droga przebyta przez samochód podzielona przez całkowity czas trwania ruchu.

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Podstawiając dane liczbowe mamy:

$$v_p = \frac{(2 \cdot 30 \cdot 90)km}{(30 + 90)h} = 45km/h$$

Średnia prędkość samochodu jest równa tylko 45 km/h. Jest więc bliższa dolnej prędkości, z jaką porusza się samochód.

W naszym przypadku (kiedy droga w górę i w dół jest taka sama) można pokazać, że:

$$\frac{v_{śr} - v_1}{v_2 - v_{śr}} = \frac{v_1}{v_2}$$

Zatem:

$$\frac{30km/h}{90km/h} = \frac{1}{3}$$

Uwaga: Zadanie sugeruje natychmiastową odpowiedź, że średnia prędkość wynosi 60 km/h (średnia arytmetyczna z obu wartości). Oczywiście jest to mylna odpowiedź. Prowadzenie samochodu z prędkością 30 km/h pod górkę wymaga trzy razy więcej czasu niż sprowadzenie go na dół z prędkością 90 km/h!

<u>Odpowiedź</u>

Średnia prędkość samochodu wynosi 45 km/h.

1.3. Obserwacja samolotu

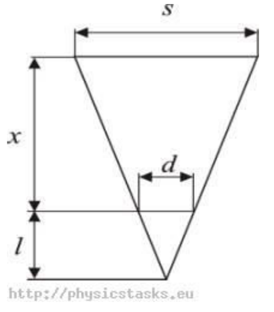
W odległości l od okna o szerokości d siedzi obserwator samolotu. Obserwator widzi samolot w oknie przez czas t. Jeśli założymy, że samolot leci ze stałą prędkością v, to w jakiej odległości l_1 od samolotu znajduje się obserwator?

Rozwiązać zadanie dla wartości: $l = 1$ m, $d = 50$ cm, $t = 3$ s, $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

<u>Podpowiedź 1:</u> *Obraz sytuacji. Narysuj obraz sytuacji.*

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Rysunek:



<u>Podpowiedź 2</u>: *Tor samolotu. Jaką drogę pokona samolot od czasu pojawienia się w oknie, do chwili gdy obserwator straci go z oczu?*

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Drogę przebytą przez samolot policzymy ze wzoru:

$$s = vt$$

<u>Podpowiedź 3</u>: *Odległość od obserwatora. Odległość samolotu od obserwatora policzymy korzystając z własności trójkątów podobnych.*

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Z powyższego rysunku wynika, że:

$$\frac{l}{d} = \frac{x + l}{s}$$

$$x + l = l_1$$

Aby znaleźć odległość l_1 należy policzyć:

$$l_1 = x + l = \frac{ls}{d} = \frac{lvt}{d}$$

Podstawiając dane liczbowe ($d = 50$ cm $= 0{,}5$ m) mamy:

$$l_1 = \frac{(1 \cdot 340 \cdot 3)}{0{,}5} m = 2040m$$

<u>Odpowiedź</u>

Samolot znajduje się w odległości 2040 m od obserwatora.

1.4. Tramwaj

Tramwaj zaczyna jechać ze stałym przyspieszeniem $a = 0{,}3\ \mathrm{ms}^{-2}$. W jakim czasie tramwaj pokona dziesiąty metr trasy? Jaka jest prędkość tramwaju po przejechaniu dziesięciu metrów?

Podpowiedź 1: Tor ruchu jednostajnie przyspieszonego. Spróbuj ustalić, jaka jest droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym oraz czas.

ROZWIĄZANIE

Wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym ma postać: $s = \frac{1}{2}at^2$,

gdzie s to odległość, jaką pokonał tramwaj, a to przyspieszenie, natomiast t to czas trwania ruchu.

Przekształcając ten wzór można wyznaczyć czas trwania ruchu: $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

Podpowiedź 2: Czas między dziewiątym a dziesiątym metrem. Zastanów się, co oznacza fakt, że bierzemy pod uwagę tylko dziesiąty metr podróży. Jak długo tramwaj będzie mijał dziesiąty metr? Jak długo zajmie mu dotarcie do końca dziewiątego metra i jak długo będzie jechał do końca dziesiątego metra?

ROZWIĄZANIE

Dziesiąty metr to w zadaniu odległość między dziewiątym i dziesiątym metrem, a nie cały dystans, jaki pokonał tramwaj.

Wprowadźmy oznaczenia: $s_9 = 9$ m, $s_{10} = 10$ m.

Podobnie, wprowadzamy oznaczenia czasu dla tych odległości:

t_9- czas przejechania dziewięciu metrów, t_{10}- czas przejechania dziesięciu metrów.

Zatem: $t_9 = \sqrt{\frac{2s_9}{a}}$, $t_{10} = \sqrt{\frac{2s_{10}}{a}}$

Podpowiedź 3: Oblicz czas, w jakim tramwaj pokonuje dziesiąty metr trasy.

ROZWIĄZANIE

Czas podróży tramwaju w trakcie dziesiątego metra całej trasy, to różnica czasu potrzebnego na pokonanie dziesięciu metrów oraz dziewięciu metrów:

$$\Delta t = t_{10} - t_9 = \sqrt{\frac{2s_{10}}{a}} - \sqrt{\frac{2s_9}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0{,}3}}\ \mathrm{s} - \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{0{,}3}}\ \mathrm{s} = 0{,}42\ \mathrm{s}$$

Podpowiedź 4: Jaka jest prędkość tramwaju na dziesiątym metrze trasy?

ROZWIĄZANIE

Prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym liczymy ze wzoru:

$$v = at_{10} = a\sqrt{\frac{2s_{10}}{a}} = \sqrt{2s_{10}a} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2{,}4\ \mathrm{m/s}$$

Odpowiedź

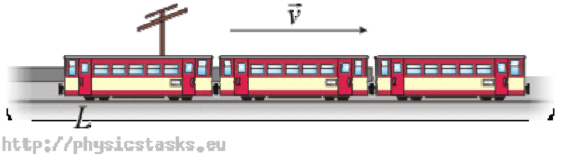
Czas, w jakim tramwaj pokonuje dziesiąty metr drogi wynosi 0,42 s, natomiast prędkość po przejechaniu dziesięciu metrów wynosi ok. 2,4 m/s.

1.5. Jadący pociąg

Pociąg towarowy o długości L = 120 m porusza się z prędkością $v = 30\frac{km}{h}$. Ile czasu zajmie pociągowi minięcie:

a) słupa wysokiego napięcia?

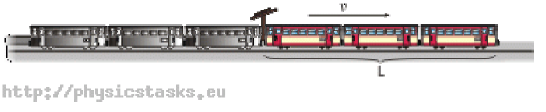
b) peronu kolejowego o długości d = 50m?



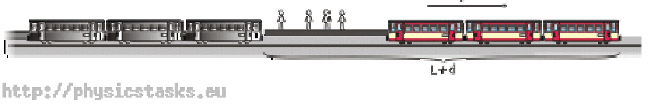
<u>Podpowiedź 1</u>: Droga lokomotywy. Pomyśl, jaką drogę musi przebyć lokomotywa, by minąć słup wysokiego napięcia lub peron kolejowy? Narysuj schemat sytuacji w obu przypadkach.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

a) Zakładamy, że szerokość słupa jest niewielka w stosunku do długości pociągu. Lokomotywa przebyła całą długość pociągu i minęła słup wysokiego napięcia.



b) Lokomotywa przebyła odcinek większy niż cała długość pociągu i długość peronu.



<u>Podpowiedź 2</u>: Upływ czasu. Sprawdź czy zmienne wyrażone są w podstawowych jednostkach

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Prędkość lokomotywy w podstawowych jednostkach wynosi:

$$v = 30\frac{km}{h} = 8{,}3\frac{m}{s}$$

Pozostałe wartości wyrażone są w jednostkach podstawowych.

Czas to stosunek przebytej drogi do prędkości pociągu. Zatem

$$\text{a) } t_1 = \frac{L}{v} = \frac{120}{8{,}3}s = 14{,}4s$$

$$\text{b) } t_2 = \frac{L+d}{v} = \frac{120+50}{8{,}3}s = 20{,}4s$$

<u>Odpowiedź</u>

Pociąg towarowy minie słup wysokiego napięcia w czasie 14,4 s, a peron w czasie 20,4 s.

1.6. Łódka

Z miasta A do miasta B pod prąd rzeki płynie łódka i wraca z powrotem do miasta A. Prędkość łódki v względem wody w obu przypadkach jest równa 4 km/h, a prędkość prądu rzeki wynosi 1,6 km/h. Oblicz stosunek czasu potrzebnego na przepłynięcie łódki z miasta A do miasta B i z powrotem do czasu potrzebnego na przepłynięcie tej samej odległości po jeziorze.

<u>Podpowiedź 1</u> Wypisz dane, które znamy z zadania.

<u>ROZWIĄZANIE:</u>

$v = 4\, {}^{km}/_{h}$ prędkość łódki względem wody

$r = 1{,}6\, {}^{km}/_{h}$ prędkość prądu rzeki

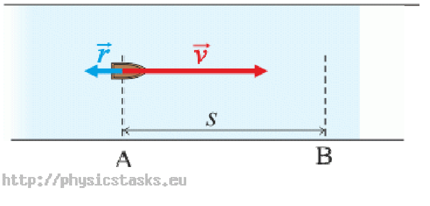
t - czas potrzebny na przepłynięcie z miasta A do B i z powrotem

t'- czas potrzebny na przepłynięcie tej samej odległości po jeziorze

t/t'=?

<u>Podpowiedź 2a</u>: Prędkość, z jaką płynie łódka z miasta A do miasta B. Wykonaj rysunek pokazujący ruch łódki i zaznacz na nim obie prędkości, czyli prędkość łódki względem rzeki i prędkość prądu w rzece. Wyznacz prędkość łódki względem brzegu. Zastanów się, w jakim czasie łódka pokona odległość między miastami A i B.

<u>ROZWIĄZANIE:</u>



Zakładamy, że odległość między miastami A i B wynosi s km. Prędkość łódki względem brzegu można obliczyć jako różnicę prędkości łódki względem wody i prędkości prądu rzeki:

$$v_1 = v - r$$

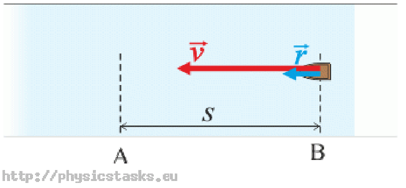
Łódka pokona odległość s w czasie:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{v - r}$$

<u>Podpowiedź 2b</u>: Prędkość, z jaką łódka płynie z miasta B do miasta A.

Wykonaj rysunek pokazujący ruch łódki z miasta B do miasta A i zaznacz prędkość łódki względem rzeki oraz prędkość nurtu rzeki. Wyznacz prędkość łódki względem brzegu. Następnie wyznacz czas, w którym łódka przepłynie odległość między miastami B i A.

ROZWIĄZANIE:



Prędkość łódki względem brzegu jest sumą prędkości łódki względem rzeki i prędkości prądu rzeki:

$$v_2 = v + r$$

Tym razem łódka przepłynie odległość s w czasie równym:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{v + r}$$

Możemy wyznaczyć więc czas potrzebny na pokonanie odległość z miasta A do B i z powrotem:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v - r} + \frac{s}{v + r} = s\left(\frac{1}{v - r} + \frac{1}{v + r}\right) = \frac{2v}{v^2 - s^2}s$$

Podpowiedź 3: Wyznaczenie czasu. Wyznacz czas potrzebny na przepłynięcie przez łódkę odległości 2AB z prędkością v.

ROZWIĄZANIE:

Na jeziorze łódka przepłynie odległość 2s z prędkością v w czasie:

$$t' = \frac{s}{v} + \frac{s}{v} = \frac{2s}{v}$$

Stosunek czasu potrzebnego przepłynięcia odległości 2s po rzece i na jeziorze:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2v}{v^2 - s^2}s}{\frac{2s}{v}} = \frac{v^2}{v^2 - r^2} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{v^2}}$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$\frac{t}{t'} = \frac{4^2}{4^2 - 1{,}6^2} = \frac{16}{13{,}44} = 1{,}19$$

Odpowiedź

Stosunek czasu potrzebnego na przepłynięcie odległości 2AB na rzece i po jeziorze jest równy:

$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{2v}{v^2 - s^2}s}{\frac{2s}{v}} = \frac{v^2}{v^2 - r^2} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{v^2}} = 1{,}19.$$

Uwaga: Mimo, że wydaje się, że łódka płynąc po rzece raz z prądem raz pod prąd nie powinna tracić na czasie przepłynięcia, podróż po rzece zajmuje więcej czasu niż przepłynięcie tej samej odległości tam i z powrotem po jeziorze. Wynik liczbowy jest niezwykle ciekawy: ten sam czynnik, $1-\frac{v^2}{c^2}$ *występuje w skróceniu odległości (i wydłużeniu czasu) w szczególnej teorii względności Einsteina.*

1.7. Kometa Halleya

Okres obiegu komety Halleya wokół Słońca wynosi $T_k = 76{,}02$ lat. 20 kwietnia 1910 kometa przeszła przez peryhelium w odległości $a_p = 0{,}59$ j.a. (1 jednostka astronomiczna to średnia odległość Ziemi od Słońca, w przybliżeniu 150 mln km). Podaj datę kolejnego przejścia komety przez peryhelium. Kiedy zaobserwujemy następne przejście komety przez peryhelium (z dokładnością do tygodnia)? Na jaką maksymalną odległość od Słońca może się oddalić kometa Halleya?

Podpowiedź 1: Przejścia przez peryhelium. Przelicz okres obiegu komety na dni.

ROZWIĄZANIE: Przejście komety przez peryhelium

$T_K = 76{,}02$ lat = 76 lat 7 dni. Po 20 kwietnia 1910 następne przejście przez peryhelium wypadło więc 27 kwietnia 1986. Kolejne będzie można zaobserwować w pierwszym tygodniu maja 2062 r. (taka dokładność w zupełności wystarczy, trzeba pamiętać, że na wynik będzie mieć wpływ przyjęta długość roku - uwzględnianie lat przestępnych, wyniki mogą więc różnić sie o jeden - dwa dni).

Podpowiedź 2: Odległość w aphelium.

Zastanów się, jak określić długość wielkiej półosi orbity komety. Trajektorią jest elipsa. Jak wykorzystać znajomość długości wielkiej osi? (Jak mają się do siebie odległości w peryhelium i aphelium?)

Długość wielkiej półosi orbity. Długość wielkiej półosi możemy określić z III prawa Keplera.

ROZWIĄZANIE: Obliczenie odległości w aphelium

Z 3. prawa Keplera obliczymy długość a_K wielkiej półosi orbity komety wokół Słońca:

$$\frac{a_Z^3}{a_K^3} = \frac{T_Z^2}{T_K^2}$$

Gdzie $a_z = 1\,j.a.$ to średnia odległość Ziemi od Słońca, a $T_Z = 1$ rok to okres obiegu Ziemi.

Otrzymamy więc:

$$a_K = \left(\frac{T}{1\,rok}\right)^{\frac{2}{3}} = 17{,}95\,j.a.$$

Mamy też: $2a_K = a_A + a_p,\ gdzie\ a_A$ to odległość komety od Słońca w aphelium.

Stąd $a_A = 2a_K - a_p = 35{,}31\,j.a.$

Odpowiedź

Po 20 kwietnia 1910 kolejne przejście przez peryhelium nastąpiło 27 kwietnia 1986, następne będzie miało miejsce w pierwszym tygodniu maja 2062 roku.

Odległość komety od Słońca w aphelium: $a_A = 35{,}31\,j.a.$

Część II – zadania dla licealistów

Kinematyka

2.1. Wycieczka rowerowa Ani

Ania wyjechała na wycieczkę rowerową. Na pierwszym odcinku drogi wspinała się na wzgórze w przybliżeniu ze stałą prędkością v_1 – była to jedna szósta całej trasy. W kolejnym etapie podróży (jedna trzecia całej trasy) jechała na prostym odcinku drogi i podziwiała piękne krajobrazy ze stałą prędkością v_2. Pozostałą część trasy pokonała w przybliżeniu ze stałą prędkością v_3 .

a) Jaka jest średnia prędkość na całej trasie, którą pokonała Ania?

b) Jaka jest średnia prędkość Ani w przypadku, gdy jedną szóstą czasu zużytego na pokonanie całej trasy przejechała z prędkością v_1 , jedną trzecią czasu - z prędkością v_2 , a pozostały czas jechała z prędkością v_3 ?

Rozwiąż to zadanie dla wartości: $v_1 = 10\frac{km}{h}, v_2 = 20\frac{km}{h}, v_3 = 30\frac{km}{h}$

Podpowiedź 1 a) Średnia prędkość na trasie

W jakim czasie Ania pokonała każdy odcinek swojej trasy? Jaki był łączny czas, w którym pokonała całą trasę? Jak w przypadku całkowitej drogi i całkowitego czasu określić średnią prędkość, z jaką jechała Ania?

ROZWIĄZANIE

Kolejne odcinki drogi oznaczamy przez: s_1, s_2 i s_3. Prawdą jest, że:

$$s_1 = \frac{s}{6};\ s_2 = \frac{s}{3};\ s_3 = \frac{s}{2}$$

Średnia prędkość to stosunek całkowitej drogi do całkowitego czasu, w jakim ta droga została pokonana. Drogę na każdym odcinku liczymy ze wzorów:

$$s_1 = v_1 t_1, \qquad s_2 = v_2 t_2, \qquad s_3 = v_3 t_3$$

Natomiast czas na każdym odcinku drogi policzymy ze wzorów:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{6v_1}, \qquad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{3v_2}; \qquad t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s}{2v_3}$$

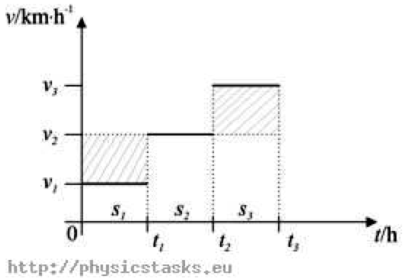
Średnia prędkość jest zatem równa:

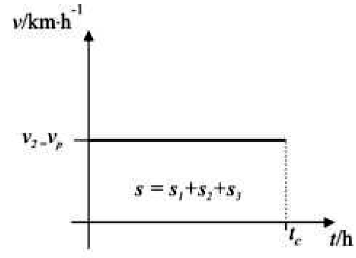
$$v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{s}{\frac{s}{6v_1} + \frac{s}{3v_2} + \frac{s}{2v_3}} = \frac{6v_1 v_2 v_3}{3v_1 v_2 + 2v_1 v_3 + v_2 v_3}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v_{śr} = \frac{(6 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 30)km}{(3 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 30 + 20 \cdot 30)h} = 20\ km/h$$

Uwaga: Narysuj wykres prędkości w funkcji czasu ($t_1 = t_2 = t_3$) oraz wykres prędkości średniej od czasu.





Powierzchnia pod krzywą na obu wykresach jest równa drodze pokonanej przez Anię na rowerze. Z wykresu jasno wynika, że

$$v_{śr} = v_2$$

<u>Podpowiedź 2 b)</u> Średnia prędkość w drugim przypadku

Należy wyrazić całkowitą drogę przebytą przez Anię. Średnią prędkość ustalamy podobnie, jak w poprzedniej części zadania.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Niech s_1, s_2, s_3 będą odcinkami długości trasy przebytej odpowiednio z prędkościami v_1, v_2, v_3 w czasie t_1, t_2, t_3 oraz niech t_c będzie całkowitym czasem trwania ruchu.

Z treści zadania mamy zatem:

$$t_1 = \frac{t_c}{6}, t_2 = \frac{t_c}{3}, t_3 = \frac{t_c}{2}$$

Droga na każdym odcinku wynosi więc:

$$s_1 = \frac{v_1 t_c}{6}, s_2 = \frac{v_2 t_c}{3}, s_3 = \frac{v_3 t_c}{2}$$

Średnia prędkość jest obliczana w następujący sposób:

$$v_{śr} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_c} = \frac{\frac{v_1 t_c}{6} + \frac{v_2 t_c}{3} + \frac{v_3 t_c}{2}}{t_c} = \frac{v_1 + 2v_2 + 3v_3}{6}$$

Podstawiając dane liczbowe mamy:

$$v_{śr} = \frac{(10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30)}{6} {}^{km}/_{h} = 23{,}33 \, {}^{km}/_{h}$$

<u>Odpowiedź</u>

Średnia prędkość to całkowita droga przebyta w całkowitym czasie, w którym następuje przemieszczenie się ciała. W pierwszym przypadku jest ona inna niż w drugim.

a) $v_{śr} = \frac{(6 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 30) km}{(3 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 30 + 20 \cdot 30) h} = 20 \, {}^{km}/_{h}$

b) $v_{śr} = \frac{(10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30) km}{6h} = 23{,}33 \, {}^{km}/_{h}$

2.2. Jak długi jest basen?

Dwóch zawodników - Karol i Piotrek – brało udział w turnieju pływackim. Wystartowali w tym samym czasie i każdy z nich płynął ze swoją stałą prędkością. Karol był lepszym pływakiem, więc wyprzedził Piotrka, wcześniej dopłynął do końca basenu i zawrócił. W drodze powrotnej znów spotykał się z Piotrkiem w odległości równej 1/n długości basenu od linii startowej.

Jak długi jest basen?

Rozwiązać zadanie dla wartości: s = 5 m (gdzie: s - odległość miejsca pierwszego spotkania się chłopców od linii startowej), n = 5.

Analiza:

Skupiamy się na chwili, kiedy dwóch zawodników się spotkało. Napisz, jakie były odległości zawodników w tym momencie od punktu początkowego, zakładając zarówno nieznaną długość basenu jak i prędkość zawodników w wodzie. Odkryj prawdziwy, w obu przypadkach, stosunek ich prędkości.

Podpowiedź 1: Pierwsze spotkanie Karola i Piotrka - stosunek prędkości

Oznaczmy długość basenu przez x .

Jaka całkowita odległość została pokonana przez Karola do pierwszego spotkania z Piotrkiem? Jaka całkowita odległość została pokonana przez Piotrka do pierwszego spotkania z Karolem?

Jaki jest stosunek dróg obu zawodników?

Pamiętaj, że bierzemy pod uwagę czas, w którym te odcinki drogi zostały pokonane.

ROZWIĄZANIE

Zakładamy, że obaj zawodnicy poruszają się ze stałą prędkością. Do pierwszego spotkania zawodników (w czasie t) stosuje się wzory:

$$v_k t = x + s,$$

gdzie:

v_k prędkość, z jaką płynął Karol

$x+s$ droga, jaką pokonał Karol do chwili, gdy spotkał się z Piotrkiem

$$v_p t = x - s,$$

v_p prędkość, z jaką płynął Piotrek

$x-s$ droga, jaką pokonał Piotrek do chwili, gdy spotkał się z Karolem

Czas t, po upływie którego Piotrek spotkał się z Karolem jest taki sam dla jednego i drugiego chłopca, bo wystartowali oni w tym samym momencie i płynęli do chwili spotkania. Dlatego też stosunek całkowitej drogi, która została pokonana do pierwszego spotkania przez obu chłopców jest równy stosunkowi prędkości, z jakimi oni płynęli:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x - s}{x + s}$$

<u>Podpowiedź 2</u>: Drugie spotkanie Karola i Piotrka – stosunek prędkości

Ponownie oceń, jaka całkowita odległość została pokonana przez Karola do drugiego spotkania z Piotrkiem oraz jaka całkowita odległość została pokonana przez Piotrka do drugiego spotkania z Karolem.

Jakie tym razem otrzymamy związki?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Do czasu drugiego spotkania zawodników (w czasie t') Karol przepłynął dwie i n-tą część długości basenu, czyli:

$$v_k t' = 2x + \frac{1}{n}x$$

W tym samym czasie Piotrek przepłynął jedną całą długość basenu i odcinek długości basenu, w którym spotkał się z Karolem (Karol w tym czasie przepłynął $1/n$ długości basenu, a Piotrek $(n-1)/n$ długości basenu):

$$v_p t' = x + \frac{n-1}{n}x$$

Stosunek prędkości dwóch zawodników w tym przypadku będzie więc równy:

$$\frac{v_p}{v_k} = \frac{x + \frac{n-1}{n}x}{2x + \frac{1}{n}x} = \frac{1 + \frac{n-1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

<u>Podpowiedź 3</u>: Porównanie obu stosunków prędkości

Porównując stosunek dwóch prędkości z pierwszego i drugiego spotkania możemy obliczyć długość basenu x.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Porównując prędkości w obu przypadkach mamy:

$$\frac{x-s}{x+s} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

Mnożymy na krzyż:

$$(x-s)(2n+1) = (x+s)(2n-1)$$

$$2nx-2ns+x-s = 2nx+2ns-x-s$$

$$2x = 4ns$$

Zatem:

$$x = 2ns$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy, że:

$$x = (2\cdot 5\cdot 5)\ \mathrm{m} = 50\ \mathrm{m}$$

<u>Odpowiedź</u>

Długość basenu wynosi 50 m.

2.3. Średnia prędkość samochodu II

Kierowca stara się pokonać swoim samochodem wzgórze. Wjazd na wzgórze to dla kierowcy odcinek drogi długości s = 4,5 km. Ale samochód jest niestety stary, dlatego wjechać na wzgórze może tylko z prędkością $v_1 = 45\frac{km}{h}$.

Jak szybko musi zjechać ze wzgórza, aby utrzymała się jego prędkość średnia:

a) $v_{śr} = 60km/h$ b) $v_{śr} = 90km/h$

<u>Podpowiedź 1</u>: Wypisanie danych, stosunek średniej prędkości.

Wyrazimy średnią prędkość przez całkowitą odległość oraz całkowity czas podróży.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

v_p- średnia prędkość samochodu,

s - droga mierzona w jedną stronę,

t_1- czas, w którym samochód wjeżdża na wzgórze,

t_2- czas, w którym samochód zjeżdża ze wzgórza.

Średnia prędkość samochodu to całkowita droga podzielona przez całkowity czas. Zatem:

$$v_{śr} = \frac{2s}{t_1 + t_2}$$

<u>Podpowiedź 2</u>: Czas podróży

Wyrazimy czas podróży za pomocą drogi i prędkości.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Czas zajmujący wjechanie pod górę $t_1$wyrażamy jako:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}$$

Czas jazdy w dół t_2 to:

$t_2 = s / v_2$

Zatem średnia prędkość samochodu wynosi:

$$v_{śr} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2})} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

<u>Podpowiedź 3</u>: Średnia prędkość samochodu

Wyznaczymy prędkość v_2

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Korzystamy ze wzoru:

$$v_{śr} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Mnożymy obie strony równania przez $\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$:

$$v_{śr}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{2(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}=2$$

Mnożymy obie strony równania przez $\frac{1}{v_{śr}}$:

$$v_{śr}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)(\frac{1}{v_{śr}})=2(\frac{1}{v_{śr}})$$

Po uproszczeniu otrzymamy:

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=\frac{2}{v_{śr}}$$

Odejmujemy stronami wartość $\frac{1}{v_1}$:

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}=\frac{2}{v_{śr}}-\frac{1}{v_1}$$

Zatem:

$$\frac{1}{v_2}=\frac{2v_1-v_{śr}}{v_1 v_{śr}}$$

<u>Podpowiedź 4</u>: Wartości liczbowe

Wstawiamy wartości liczbowe do otrzymanego wzoru.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

a)$v_2=\frac{v_{śr}v_1}{2v_1-v_{śr}}=\frac{60\cdot 45km}{2\cdot 45-60h}=90km/h$

b) $v_2=\frac{v_{śr}v_1}{2v_1-v_{śr}}=\frac{90\cdot 45km}{2\cdot 45-90h}$

Wstawiając wartości liczbowe do wzoru okazuje się, że mianownik jest równy zero. Oznacza to, że kierowca pojazdu nie może osiągnąć średniej prędkości 90 km/h. Jak szybko nie jechałby z górki i tak nie odrobi czasu utraconego na wjazd pod górkę.

Liczymy czas jazdy pod górkę:

$$t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{4500\cdot 3600}{45\cdot 1000}s=360s$$

Teraz liczymy łączny czas jazdy pod górkę oraz z górki:

$$t_1+t_2=\frac{2s}{v_{śr}}=\frac{2\cdot 4500\cdot 3600}{90\cdot 1000}s=360s$$

Ponieważ oba czasy są takie same, więc kierowca nie ma w ogóle czasu, aby zjechać w dół w drugim przypadku.

<u>Odpowiedź</u>

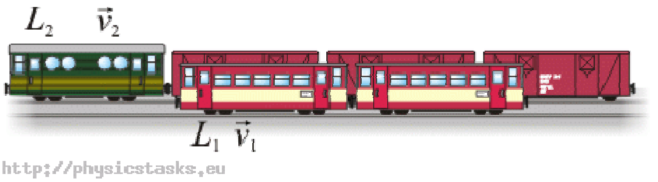
a) $v_2=\frac{v_{śr}v_1}{2v_1 v_{śr}}=90km/h$
b) Kierowca nie może utrzymać takiej prędkości średniej. Nie miałby czasu, aby zjechać z górki.

2.4. Jadący pociąg II

Pociąg osobowy o długości $L_1 = 60\ m$ jechał z prędkością $v_1 = 80 \, {}^{km}/_{h}$. Po jakim czasie pociąg ten minie pociąg towarowy o długości $L_2 = 120m$, który porusza się z prędkością $v_2 = 30 \, {}^{km}/_{h}$ w przypadku, gdy oba pociągi jadą:

a) w tym samym kierunku?

b) w przeciwnych kierunkach?



<u>Podpowiedź 1</u>: Zamiana jednostek

Przed przystąpieniem do rozwiązania zadania należy upewnić się, czy dane w zadaniu są zapisane przy użyciu jednostek podstawowych.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Prędkości obu pociągów zapisane w jednostkach podstawowych mają wartości:

$$\text{pociąg osobowy: } v_1 = 80\frac{km}{h} = 22{,}2\frac{m}{s}$$

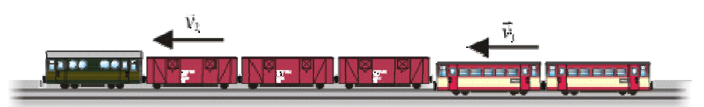
$$\text{pociąg towarowy: } v_2 = 30\frac{km}{h} = 8{,}3\frac{m}{s}$$

<u>Podpowiedź 2</u>: Wzajemna prędkość obu pociągów

Narysować schemat sytuacji w obu przypadkach.

Wyobraź sobie, że jesteś maszynistą pociągu osobowego. Jaka jest wzajemna szybkość, z jaką poruszają się oba pociągi?

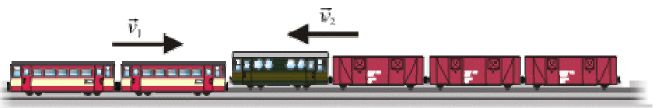
<u>ROZWIĄZANIE:</u>



a) http://physicstasks.eu

Z punktu widzenia maszynisty pociągu osobowego prędkość względna obu pociągów jest równa:

$$v_a = v_1 - v_2 = 13{,}9\frac{m}{s}$$



b) http://physicstasks.eu

Z punktu widzenia maszynisty pociągu osobowego względna prędkość obu pociągów jest równa:

$$v_b = v_1 + v_2 = 30{,}5\frac{m}{s}$$

<u>Podpowiedź 3</u>: Przebyta droga

Jaka jest długość przebytej drogi przez pociąg osobowy w obu przypadkach?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Pociąg musi przejechać taki sam odcinek drogi w obu przypadkach.

a)

b)

Lokomotywa pociągu pasażerskiego musi pokonać odległość w obu przypadkach równą:

$$L_1 + L_2$$

<u>Podpowiedź 4</u>: Upływ czasu

Znamy drogę przebytą przez pociągi oraz szybkość, z jaką tą drogę pokonały. Łatwo zatem wyznaczyć czas, w którym pociągi się minęły.

<u>ROZWIĄZANIE</u>:

Wyznaczymy czas mijania dla dwóch przypadków. Wiemy, że prędkość jest równa ilorazowi drogi i czasu, zatem czas będzie ilorazem drogi i prędkości.

a)

$$t_1 = \frac{L_1 + L_2}{v_a} = \frac{60 + 120}{13{,}9} s = 12{,}9 s$$

b)

$$t_2 = \frac{L_1 + L_2}{v_b} = \frac{60 + 120}{30{,}5} s = 5{,}9 s$$

<u>Odpowiedź</u>

Pociąg osobowy minie pociąg towarowy, gdy jadą w tym samym kierunku, po upływie czasu 12,9 s. Natomiast, gdy pociągi jadą w przeciwnych kierunkach, to po upływie czasu 5,9 s.

2.5. Droga hamowania pociągu

Pociąg porusza się z prędkością 72 km·h^{-1} przed stacją kolejową zaczyna hamować. Zatrzymuje się w ciągu 2 minut. W jakiej odległości od stacji maszynista musi rozpocząć hamowanie pociągu? Zakładamy, że ruch pociągu podczas hamowania jest jednostajnie opóźniony.

Podpowiedź 1: Wypisz wszystkie dane, które znamy z treści zadania.

ROZWIĄZANIE:

v_o = 72 km·h^{-1} - prędkość pociągu w momencie rozpoczęcia hamowania,
t_h = 2 min - czas po którym zatrzymuje się pociąg,
s_h = ? (m) - droga hamowania pociągu.

Podpowiedź 2: Droga hamowania pociągu.

ROZWIĄZANIE:

Znamy prędkość początkową pociągu v_o i czas hamowania pociągu t_h . Wiemy, że pociąg podczas hamowania porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym. Zapiszmy wzór na drogę dla ruchu jednostajnie opóźnionego:

$$s_h = v_o t_h - \frac{1}{2} a t_h^2 \qquad (1)$$

Korzystając ze wzoru na prędkość dla ruchu jednostajnie opóźnionego:

$$v_k = v_o - a t_h \qquad (2)$$

i wiedząc, że pociąg zatrzymał się na stacji (v_k=0), możemy napisać powyższe równanie:

$$0 = v_o - a t_h \qquad (3)$$

$$a = \frac{v_o}{t_h} \qquad (4)$$

Do równania (1) wstawiamy (4) i otrzymujemy:

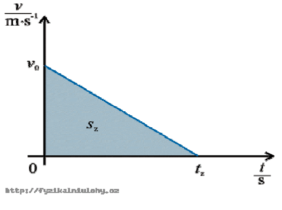
$$s_h = v_o t_h - \frac{1}{2}\frac{v_o}{t_h} t_h^2 = v_o t_h - \frac{1}{2} v_o t_h = \frac{v_o t_h}{2} \qquad (5)$$

Podstawiamy wartości liczbowe: $\mathrm{v_o = 72 km \cdot h^{-1} = 20 m \cdot s^{-1}}$, $\mathrm{t_h = 2 min = 120 s}$

$$\mathrm{s_h = \frac{20 \cdot 120}{2} m = 1200 m} \qquad (6)$$

Rozwiązanie graficzne:

Narysuj wykres prędkości pociągu w funkcji czasu.



Drogę hamowania pociągu możemy obliczyć również jako pole powierzchni s_z .

W tym wypadku jest to pole trójkąta: $s_h = \frac{1}{2} t_z v_o = \frac{v_o t_h}{2}$

Odpowiedź

Droga hamowania pociągu wynosi: $s_h = \frac{v_o t_h}{2} = 1200m = 1{,}2km$.

[Opracowanie AK]

2.6. Rzut pionowy piłki

Piłka została wyrzucona pionowo w górę z prędkością początkową 10 ms^{-1}. Oblicz czas lotu piłki na wysokość równą połowie maksymalnej wysokości, na którą wznosi się piłka. Opór powietrza można zaniedbać.

Podpowiedź 1: Wypisz wszystkie dane, które znamy z treści zadania.

ROZWIĄZANIE:

$v_o = 10\ m \cdot s^{-1}$ - prędkość początkowa piłki,
h_{max} = ? (m) - wysokość maksymalna na jaką wznosi się piłka,
t_1 = ? (s) - czas ruchu piłki do połowy maksymalnej wysokości.
Z tablic:
$g = 10\ ms^{-2}$ - przyspieszenie ziemski.

Podpowiedź 2: Ruch piłki.

ROZWIĄZANIE:

Piłka porusza się pionowo do góry ruchem jednostajnie opóźnionym. Zapiszmy równania ruchu:

$$v(t) = v_o - gt \qquad (1)$$

$$h(t) = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Podpowiedź 3: Punkt zwrotny. Jaką prędkość będzie miała piłka w punkcie zwrotnym, na maksymalnej wysokości? Ile będzie wynosiła wysokość maksymalna?

ROZWIĄZANIE:

W punkcie zwrotnym piłka zatrzymuje się, czyli v_k =0. Korzystając z wzoru (1) możemy napisać:

$$0 = v_o - g t_w \qquad (3)$$

gdzie t_w oznacza czas wznoszenia piłki.

$$t_w = \frac{v_o}{g} \qquad (4)$$

Obliczymy teraz wysokość maksymalną na jaką wznosi się piłka po czasie wznoszenia t_w:

$$h_{\max} = v_o t_w - \frac{1}{2} g t_w^2 \qquad (5)$$

Do wzoru (5) wstawiamy wyrażenie na t_w (4):

$$h_{\max} = v_o \frac{v_o}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_o^2}{g^2} = \frac{v_o^2}{2g} \qquad (6)$$

Obliczenia:

Podstawmy dane liczbowe do wzorów (4) i (6):

$$\mathrm{t_w} = \frac{10}{10}\mathrm{s} = 1\mathrm{s}$$

$$\mathrm{h_{max}} = \frac{10^2}{2 \cdot 10}\mathrm{m} = 5\mathrm{m} \qquad (7)$$

Podpowiedź 4: Oblicz teraz połowę wysokości maksymalnej.

ROZWIĄZANIE:

$$h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (8)$$

$$h = \frac{h_{\max}}{2} = \frac{v_o^2}{4g} \qquad (9)$$

$$\frac{v_o^2}{4g} = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (10)$$

$$v_o^2 = 4 v_o t g - 2 g^2 t^2 \qquad (11)$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2g^2 t^2 - 4 v_o t g + v_o^2 = 0 \qquad (12)$$

$$t_{1,2} = \frac{4 v_o g \pm \sqrt{8 v_o^2 g^2}}{4 g^2} = \frac{2 v_o \pm \sqrt{2} v_o}{2g} = \frac{v_o}{g}(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}) \qquad (13)$$

$$t_1 = \frac{v_o}{g}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0{,}3 s \qquad (14)$$

$$t_2 = \frac{v_o}{g}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1{,}7 s \qquad (15)$$

Pierwsze rozwiązanie t_1 odpowiada pierwszej sytuacji, gdy piłka wznosi się w górę i jest na połowie wysokości maksymalnej h_{max} . Drugie rozwiązanie t_2 odpowiada sytuacji, kiedy piłka spada już w dół i jest ponownie na połowie wysokości maksymalnej h_{max} .

Odpowiedź

Wysokość maksymalna, na którą wznosi się piłka wynosi: $h_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} = 5m$

Czas wznoszenia się piłki na połowę wysokości maksymalnej wynosi: $t_1 = \frac{v_o}{g}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0{,}3 s$

[Opracowanie AK]

2.7. Spadający swobodnie kamień

Spadający swobodnie kamień ma w pewnym położeniu prędkość chwilową $5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a w innym, niżej położonym miejscu, prędkość ta wynosi $8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. W ciągu jakiego czasu kamień pokona drogę od jednego położenia do drugiego i jaka jest odległość tych punktów?

Zapis danych

$v_1 = 5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$	prędkość kamienia w pierwszym położeniu
$v_2 = 8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$	prędkość kamienia w niższym położeniu
t = ? (s)	czas, w którym kamień pokona odcinek od pierwszego położenia do drugiego
s = ? (m)	odległość obu punktów na drodze
Z tablic:	
$g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$	przyspieszenie grawitacyjne

Podpowiedź 1

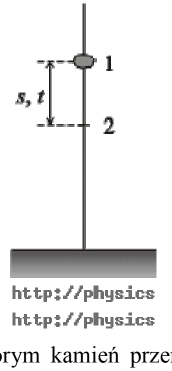
Jakim ruchem porusza się kamień? Przypomnij sobie zależność szybkości od czasu w tym ruchu.

Jak obliczysz czas przelotu kamienia z jednego położenia do drugiego? Czy znasz wszystkie wielkości potrzebne do obliczeń?

ROZWIĄZANIE

Kamień porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

Zależność szybkości od czasu w tym ruchu: $v(t) = gt$



Czas t, w którym kamień przemieści się z jednego do drugiego położenia, określony jest poprzez przedział czasu pomiędzy położeniem 2 a 1 (*patrz rysunek*), czyli:

$$t = t_2 - t_1$$

Z treści zadania wiemy, że chodzi o spadek swobodny. Prędkość w położeniu 1 wynosi:

$$v_1 = gt_1$$

Stąd: $t_1 = \frac{v_1}{g}$ (1)

Prędkość w położeniu 2 wynosi:

$$v_2 = gt_2$$

Stąd:

$$t_2 = \frac{v_2}{g} \quad (2)$$

Na czas *t* otrzymujemy:

$$t = \frac{v_2}{g} - \frac{v_1}{g} = \frac{v_2 - v_1}{g}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$t = \frac{8-5}{9{,}81} = 0{,}3s$$

<u>*Podpowiedź 2*</u>

Wiemy, że kamień spada swobodnie. Jak można określić odległość między tymi dwoma położeniami, czyli drogę, którą pokonał pomiędzy pierwszym a drugim położeniem?

Do obliczeń wykorzystaj wzory (1), (2) z rozwiązania poprzedniej podpowiedzi.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Przypomnijmy wzór na drogę dla spadku swobodnego:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

Odległość położeń 1 i 2 określimy jako różnicę drogi, którą pokonał kamień do położenia 2 i drogi, którą pokonał do położenia 1.

$$s = s_2 - s_1 = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2)$$

Za t_2 i t_1 podstawimy ze wzorów (1) i (2).

$$s = \frac{g}{2}\left(\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{v_1^2}{g^2}\right) = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2)$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$s = \frac{1}{2 \cdot 9{,}81}(8^2 - 5^2)m = 2m$$

<u>Odpowiedź</u>

Kamień dotrze z pierwszego do drugiego położenia w czasie 0,3 s. Odległość między tymi dwoma położeniami wynosi 2 m.

2.8. Rzut pionowy w górę

Z powierzchni Ziemi wystrzelono pionowo w górę pocisk artyleryjski o masie m z prędkością v_1. Oblicz:

a) maksymalną wysokość h pocisku

b) prędkość v_k pocisku w chwili zderzenia z ziemią

c) całkowity czas lotu pocisku t_c.

Uwaga: Opór powietrza pomijamy. Pole grawitacyjne traktujemy jako jednorodne.

Podpowiedź 1

Aby znaleźć maksymalną wysokość h można stosować dwa różne sposoby - czy potrafisz podać jeden z nich?

ROZWIĄZANIE

Maksymalną wysokość h możemy określić przy pomocy:

- zasady zachowania energii mechanicznej (dalej w skrócie ZZEM)
- opisu kinematycznego tego ruchu

Podpowiedź 2

Przyjmijmy na powierzchni Ziemi zerowy poziom energii potencjalnej. Jaki rodzaj energii ma pocisk w chwili, gdy opuszcza powierzchnię? Co się dzieje z energią przy osiągnięciu maksymalnej wysokości h?

ROZWIĄZANIE

W chwili, gdy pocisk opuszcza powierzchnię ziemi, ma energię kinetyczną E_{k1}:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2$$

która jest równocześnie jego całkowitą energią mechaniczną (energia potencjalna $E_{p1} = 0$ zgodnie z naszym ustaleniem).

Gdy pocisk wznosi się coraz wyżej, stopniowo wytraca prędkość, maleje jego energia kinetyczna, ale rośnie potencjalna. W chwili osiągnięcia maksymalnej wysokości h, jego prędkość, a więc i energia kinetyczna E_{k2} maleje do zera ($E_{k2} = 0$) - cała początkowa energia mechaniczna zamieniła się na energię potencjalną E_{p2}:

$$E_{p2} = mgh$$

(gdzie g to przyspieszenie grawitacyjne).

Pomijamy opór powietrza, a więc zgodnie z ZZEM zachodzi:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = 0 + mgh$$

zatem: $h = \frac{v_1^2}{2g}$

Pocisk wzniesie się na maksymalną wysokość

$$h = \frac{v_1^2}{2g}$$

Komentarz: Inny sposób określenia maksymalnej wysokości h

Możemy też określić wysokość h z rozważań kinematycznych. Ruch pocisku jest ruchem jednostajnie opóźnionym (rzut pionowy w górę), jest więc opisany równaniami:

$$H(t) = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = v_1 - gt$$

gdzie $H(t)$ to wysokość nad ziemią w chwili t, a $v(t)$ prędkość w chwili t.

W momencie $t = t_0$, gdy pocisk osiągnie maksymalną wysokość, mamy: $H(t_0) = h$, $v(t_0) = 0$. Zatem:

$$h = v_1 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

$$0 = v_1 - g t_0$$

Z drugiego równania wyznaczamy czas t_0 i podstawiamy go do pierwszego równania:

$$t_0 = \frac{v_1}{g}$$

$$h = v_1 \left(\frac{v_1}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_1}{g}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2g}$$

Podpowiedź 3

Skorzystaj z ZZEM. Jaką całkowitą energię mechaniczną ma pocisk w momencie spadku? Porównaj ją z energią całkowitą na początku ruchu (tj. zaraz po wystrzeleniu).

ROZWIĄZANIE

Zgodnie z ZZEM energia mechaniczna pocisku w czasie trwania ruchu będzie jednakowa - dotyczy to również energii mechanicznej na początku i na końcu ruchu.

Na początku pocisk miał tylko energię kinetyczną $E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2$, na końcu (w chwili uderzenia) tylko energię kinetyczną $E_{kk} = \frac{1}{2} m v_k^2$.

Ponieważ z ZZEM: $E_{k1} = E_{kk}$, musi być też $v_1 = v_k$.

Prędkość v_1 ma tę samą wartość jak v_k, zmieni się tylko jej zwrot.

Podpowiedź 4

Wychodząc z równań kinematycznych dla rzutu pionowego w górę, skorzystaj z zależności opisującej wysokość nad ziemią H(t) od czasu. Jaka jest ta wysokość w chwili spadku? Przekształcenia powinny doprowadzić do równania kwadratowego, które należy rozwiązać.

ROZWIĄZANIE

Wysokość w rzucie pionowym w górę opisujemy równaniem:

$$H(t) = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

W chwili $t = t_c$ (a więc w momencie uderzenia) wysokość przyjmuje wartość zero, tj.:

$$H(t_c) = 0$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe względem czasu:

$$0 = v_1 t_c - \frac{1}{2} g {t_c}^2$$

$$0 = t_c(v_1 - \frac{1}{2} g t_c)$$

Równanie to ma 2 rozwiązania:

3. $t_{c1} = 0$ … określa stan początkowy ($t = 0$; $H(0) = 0$)
4. $t_{c2} = \frac{2v_1}{g}$ … szukane ROZWIĄZANIE

Całkowity czas ruchu $t_c = \frac{2v_1}{g}$.

Komentarz: Inny sposób określenia czasu lotu t_c

Możemy też czas całkowity t_c określić jako sumę czasu wznoszenia się (oznaczmy go jako t_w) i czasu spadania (oznaczmy go t_s).

Dla ruchu w górę: $v(t) = v_1 - gt$

Gdy minie czas wznoszenia się t_w, prędkość $v(t_w) = 0$:

$$0 = v_1 - g t_w$$

$$t_w = \frac{v_1}{g}$$

Dla spadania: $v(t) = gt$ (spadek swobodny)

Gdy minie czas spadania t_s, prędkość $v(t_s)$ jest prędkością końcową: $v(t_s) = v_k$:

$$v_k = g t_s$$

$$t_s = \frac{v_k}{g}$$

Całkowity czas lotu t_c:

$$t_c = t_w + t_s = \frac{v_1}{g} + \frac{v_k}{g} = \frac{2v_1}{g}$$

ponieważ w części b) pokazaliśmy, że $v_1 = v_k$.

Odpowiedź

a) Wzór na maksymalną wysokość: $h = \frac{v_1^2}{2g}$

b) Prędkość pocisku w chwili spadku:

$v_k = v_1$, prędkości mają przeciwne zwroty

c) Całkowity czas lotu: $t_c = \frac{2v_1}{g}$

Dynamika

2.9. Przyspieszenie dośrodkowe rakiety

Rakieta obiega Ziemię na wysokości 400 km. Określ wartość przyspieszenia dośrodkowego rakiety. Porównaj odpowiedź z wartością przyspieszenia grawitacyjnego g na powierzchni Ziemi.

Uwaga: Przy rozwiązaniu zakładamy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6378 km.

Zapis danych

$h = 400km$ wysokość rakiety nad powierzchnią Ziemi

$a_d = ?\ (m \cdot s^{-2})$ przyspieszenie dośrodkowe

Z tablic:

$R_z = 6378\ km$ promień Ziemi

$\chi = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ stała grawitacji

$M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24} kg$ masa Ziemi

Podpowiedź 1: rodzaj ruchu

Jak można sklasyfikować rodzaj ruchu rakiety ze względu na tor i prędkość?

ROZWIĄZANIE

Chodzi o ruch jednostajny po okręgu.

Podpowiedź 2: rodzaj siły

Jaka siła działa na rakietę z punktu widzenia układu inercjalnego? Jaka siła zakrzywia tor jej ruchu? Jak ją obliczyć?

ROZWIĄZANIE

Na rakietę działa siła grawitacji Ziemi! (Zaniedbujemy oddziaływania grawitacyjne innych ciał.) Według prawa powszechnej grawitacji Newtona:

$$F_g = \chi \frac{mM_Z}{(R_z + h)^2}$$

gdzie χ to stała grawitacji, m masa rakiety, M_z masa Ziemi, R_z promień Ziemi a h wysokość nad powierzchnią Ziemi.

<u>Podpowiedź 3</u>: rodzaj siły inaczej

Jaka siła odpowiada za ruch po okręgu, jak ją wyrażamy? Jak ma się do siły grawitacji w naszym przykładzie?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

W ruchu po okręgu za zakrzywienie toru odpowiada siła dośrodkowa

$$F_d = ma_d$$

gdzie m to masa ciała a a_d przyspieszenie dośrodkowe.

Siła dośrodkowa nie jest jakimś nowym rodzajem siły, jej rolę pełni w różnych sytuacjach jakaś inna, znana nam siła – naciągu, grawitacyjna, elektrostatyczna… W naszym przykładzie jest nią siła grawitacji.

<u>Podpowiedź 4</u>: samodzielna analiza

Biorąc pod uwagę powyższe podpowiedzi, spróbuj samodzielnie przeanalizować zagadnienie i określić wartość przyspieszenia dośrodkowego.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Jak zauważyliśmy, siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej. Możemy więc zapisać równość:

$$F_g = F_d \Rightarrow \chi \frac{mM_z}{(R_Z + h)^2} = ma_d$$

Stąd:

$$a_d = \chi \frac{M_z}{(R_Z + h)^2}$$

Podstawiamy wartości:

$$\chi = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$$

$$M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24} kg$$

$$a_d = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{\left(6{,}37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5\right)^2} \, m \cdot s^{-2} = 8{,}68 \, m \cdot s^{-2}$$

Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$, obliczona wartość przyspieszenia $a_d = 8{,}68\ m \cdot s^{-2} \approx 0{,}88g$.

<u>Odpowiedź</u>

Na rakietę działa przyspieszenie dośrodkowe $a_d = \chi \frac{M_Z}{(R_Z+h)^2} = 8{,}68 \, m \cdot s^{-2}$, co odpowiada $0{,}88g$.

2.10. Przyspieszający samochód

Samochód o masie 1 400 kg rusza na poziomej drodze. Po pokonaniu 1 000 m osiąga pewną prędkość. Silnik napędza samochód siłą o wartości 1 700 N, a na samochód działa jeszcze siła oporu ruchu o wartości 100 N.

Oblicz przyspieszenie samochodu i jego prędkość na końcu drogi.

Uwaga: Jest to ruch prostoliniowy i będziemy brali pod uwagę tylko wartości przyspieszenia i prędkości.

Dane

m = 1 400 kg masa samochodu

L = 1 000 m przebyta droga

F_m = 1 700 N siła z jaką silnik napędza samochód

F_o = 100 N siła oporu

a = ? ($m \cdot s^{-2}$) przyspieszenie

v = ? ($m \cdot s^{-1}$) prędkość, którą uzyska samochód

Podpowiedź 1 - siła wypadkowa

Jaka jest wartość siły wypadkowej F działającej na samochód, jeśli na samochód działa siła napędzająca go oraz siła oporu ruchu?

ROZWIĄZANIE

Wartość wypadkowej siły jest równa różnicy siły z jaką silnik napędza samochód i siły oporu ruchu:

$$F = F_m - F_0$$

Uwaga: Silnik napędza samochód bezpośrednio za pomocą przekładni i kół.

Podpowiedź 2 - oblicz przyspieszenie samochodu

Jeśli znasz wartość siły wypadkowej działającej na samochód, to czy możesz obliczyć jego przyspieszenie?

ROZWIĄZANIE

Przyspieszenie można wyznaczyć z drugiego prawa Newtona, w którym wypadkowa siła działająca na ciało jest wprost proporcjonalna do przyspieszenia ciała:

$$F = ma \qquad (1)$$

W równaniu (1) możemy zastąpić F wyrażeniem na siłę wypadkową i wyznaczyć a:

$$F_m - F_0 = ma$$

$$a = \frac{F_m - F_0}{m}$$

Obliczenia:

$F_m = 1700N$

$F_o = 100N$

m = 1400kg

$$a = \frac{F_m - F_0}{m} = \frac{(1700 - 100)}{1400} ms^{-2} = 1{,}14\, ms^{-2}$$

Podpowiedź 3 - obliczenie prędkości samochodu

Ruch samochodu jest ruchem jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym. Skorzystaj z definicji przyspieszenia.

ROZWIĄZANIE

Z wzoru na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

gdzie: Δv jest zmianą prędkości w czasie Δt. Biorąc pod uwagę, że nasz ruch rozpoczął się w chwili zero, możemy zapisać, że $\Delta v = v$. Przekształcamy powyższy wzór Δt i wyznaczamy:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v}{a} \qquad (2)$$

Na drodze L ruch jest jednostajnie przyspieszony:

$$L = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \qquad (3)$$

Do wzoru (3) wstawiamy wyrażenie (2) i wyznaczamy wartość prędkości v:

$$L = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} \Longrightarrow v = \sqrt{2aL}$$

Obliczenia:

$a = 1{,}14$ m·s^{-2}, $L = 1000$ m

$$v = \sqrt{2aL} = \left(\sqrt{2 \cdot 1{,}14 \cdot 1000}\right) m \cdot s^{-1} = 47{,}8 m \cdot s^{-1} = 172 km \cdot h^{-1}$$

Komentarz

Siła oporu ruchu ma przeciwny zwrot do zwrotu wektora prędkości samochodu. Siła oporu powietrza rośnie proporcjonalnie do kwadratu prędkości samochodu i zmienia swoją wartość w czasie ruchu samochodu.

Odpowiedź

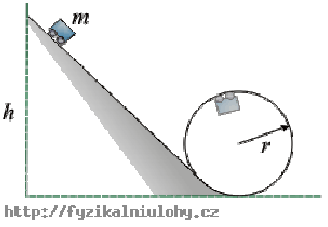
Samochód porusza się z przyspieszeniem

$$a = \frac{F_m - F_0}{m} = 1{,}14 m \cdot s^{-2}.$$

Na końcu drogi L uzyskuje prędkość o wartości $v = \sqrt{2aL} = 47{,}8 m \cdot s^{-1}$.

2.11. Wózek

Mały wózek o masie m zjeżdża z górki po torze, który kończy się powierzchnią cylindryczną o promieniu r. Z jakiej wysokości h powinien zjeżdżać wózek aby przejechać całą pętlę kołową? Moment bezwładności oraz opór toczenia kół jest znikomy.



Dane:

m masa ciężarówka

r promień powierzchni cylindrycznej (pętli)

h =? wysokość, z której wózek musi zjechać w dół, aby przejechać przez całą pętle

ROZWIĄZANIE:

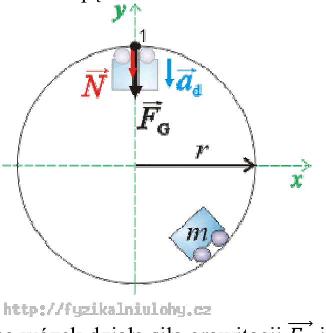
Aby wózek przejechał całą drogę musi mieć w najwyższym punkcie pętli niezerową prędkość. Najpierw należy się zastanowić jaka jest minimalna wartość prędkości. W tym celu należy skorzystać z drugiego prawa Newtona. Wózek nie jest przez nic ciągnięty. Aby znaleźć wysokość należy skorzystać z prawa zachowania energii mechanicznej.

Podpowiedź 1

Dowiedz się, jaką minimalną prędkość musi mieć wózek w najwyższym punkcie pętli, aby przejechał całą drogę. Narysuj obrazek przedstawiający omawianą sytuację i zaznacz wszystkie siły działające na wózek. Napisz równania ruchu dla wózka. Jakie będą wartości sił w krytycznym momencie, gdy pojazd zacznie zjeżdżać?

ROZWIĄZANIE:

Prędkość w najwyższym momencie na pętli.



W najwyższym punkcie pętli na wózek działa siła grawitacji $\vec{F_G}$ i siła normalna $\vec{N}$ reakcji toru na wózek, związana z ruchem po okręgu. Przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a_d}$ ma zwrot w dół, w stronę środka pętli.

Równanie ruchu dla wózka :

$$\vec{N} + \vec{F_G} = m\vec{a_d}$$

$\vec{F_G}$ siła grawitacji działająca na wózek,
$\vec{N}$ siła normalna reakcji toru na wózek,
$\vec{a_d}$ przyspieszenie działające na wózek.

Przepisujemy równania w formie skalarnej, w tym celu definiujemy układ współrzędnych *x*, *y*.

$$-N - F_G = -ma_d$$

$$N + mg = ma_d$$

m - masa wózka
g - przyspieszenie ziemskie

W chwili, gdy na wózek działa siła umożliwiająca jego wypadnięcie z pętli jej działanie jest równoważone przez siłę N. Minimalna prędkość, z jaką pojazd musi zjechać, aby utrzymać się na torze i nie spaść , otrzymujemy z warunku , że N = 0 N.

$$mg = ma_d$$
$$mg = m\frac{v_1^2}{r}$$

v_1 - minimalna prędkość wymagana w najwyższym punkcie pętli kołowej
r - promień okrągłej pętli

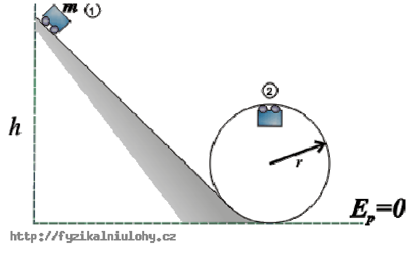
Stąd wyznaczamy prędkość v_1:

$$g = \frac{v_1^2}{r}$$

$$v_1 = \sqrt{gr} \qquad (1)$$

<u>*Podpowiedź 2*</u>
Wybierz poziom zerowej energii potencjalnej. Napisz, równanie, zgodnie z zasadą zachowania energii mechanicznej , określ energię potencjalną na początku drogi wózka (1) oraz w najwyższym punkcie pętli (2).

<u>ROZWIĄZANIE</u>
Należy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej.



$$ZZME: E_{p1} = E_{p2} + E_{k2}$$

E_{p1} - energia potencjalna na wysokości h,
E_{p2} - energia potencjalna w najwyższym punkcie w pętli,
E_{k2} - energia kinetyczna w najwyższym punkcie w pętli.

$$mgh = mg2r + \frac{mv_1^2}{2}$$

Z równania (1) należy podstawić wyrażenie na v_1^2

$$mgh = mg2r + \frac{mgr}{2}$$

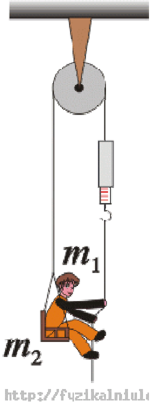
$$h = \frac{5r}{2}$$

<u>Odpowiedź:</u>
Wysokość z jakiej musi zjechać wózek by pokonać całą trasę to $h = \frac{5r}{2}$.

2.12. Chłopiec na wyciągu

Przez koło pasowe zawieszona jest lina. Na jednym z jej końców zawieszone jest krzesełko ze stali nierdzewnej o wadze 32 kg, do drugiego końca doczepiony jest dynamometr. Chłopiec, ważący 64 kg siedzi na krzesełku i ciągnie zawieszony ciężarek, tak, że obciążenie wynosi 600 N.
a) Oblicz przyspieszenie, z którym chłopiec siedzący na krześle działa na układ, tak by siłomierz wskazywał 600 N, jaki jest zwrot przyspieszenia dwóch ciał (czy w górę lub w dół?).
b) Określić siłę wywieraną przez chłopca na krzesło.

Masę koła, dynamometru i lin pomijamy.



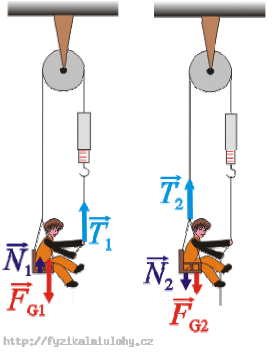
Dane:
m_2 = 32 kg masa krzesełka
m_1 = 64 kg masa chłopca
600 N wskazanie siłomierza
a = ? m s^{-2} Przyśpieszenie, z jakim porusza się chłopiec na krześle
N_2 = ? N wartość siły, z jaką chłopiec działa na krzesło

Podpowiedź 1:

Należy uświadomić sobie, jakie siły działają na chłopca i krzesło. Narysuj obrazek i zaznacz, występujące siły. Napisz równanie ruchu dla chłopca i krzesła.

Zalecenie: Narysuj siły działające na chłopca i krzesło dla dwóch zwrotów przyspieszenia.

ROZWIĄZANIE: Wskazówka 1 - równania ruchu (obliczenie przyspieszenia)



Na chłopca działają następujące siły:
$\vec{N_1}$ siła nacisku, która działa na krzesło,

$\vec{T_1}$ siła tarcia działająca na linę obciążoną ciężarkiem,

$\vec{F_{G1}}$ siła grawitacji, która działa na chłopca.

Siły działające na krzesło:
$\vec{N_2}$ siła nacisku, którą krzesło działa na chłopca,

$\vec{T_2}$ siła tarcia, która działa na linę, do której zaczepione jest krzesełko,

$\vec{F_{G2}}$ siła grawitacji, która działa na krzesełko z chłopcem.

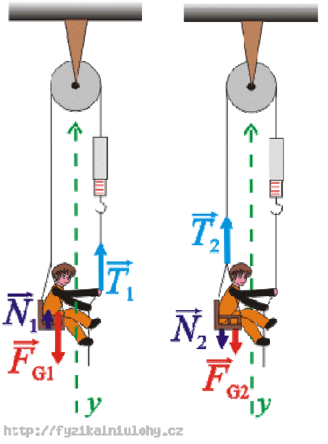
Równanie ruchu dla chłopca:
$$\vec{N_1} + \vec{F_{G1}} + \vec{T_1} = m_1\vec{a} \qquad (1)$$

Równanie ruchu dla krzesła:
$$\vec{N_2} + \vec{F_{G2}} + \vec{T_2} = m_2\vec{a} \qquad (2)$$

Podpowiedź 2

Wybierz układ współrzędnych i przepisz równanie ruchu skalarnie. Pamiętaj, jaki jest związek między siłą nacisku wywieraną przez krzesełko na chłopca, a siłą nacisku wywieraną przez chłopca na krzesełko. Zastanów, się jaka jest zależność między siłami tarcia.

ROZWIĄZANIE:
Aby napisać równanie ruchu skalarnie, należy wybrać odpowiedni układ współrzędnych. Oś y przechodzi przez środek koła, na którym zawieszony jest układ i jest skierowana do góry.



Skalarne równanie ruchu dla chłopca:

$T_1 + N_1 - F_{G1} = m_1 a$ (3)

Skalarne równanie ruchu dla krzesełka:

$T_2 - N_2 - F_{G2} = m_2 a$ (4)

Ponieważ zaniedbujemy masę kola pasywnego, zatem moment bezwładności nie wpływa na siłę tarcia liny. Wielkość siły tarcia opisuje trzecia zasada dynamiki Newtona:

$|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}|$

Siła nacisku wywierana przez chłopca na krzesło, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona równa jest sile nacisku wywieranej przez krzesło na chłopca:

$|\vec{N_1}| = |\vec{N_2}|$

Przepisujemy równania (3) i (4):

$T_2 + N_2 - F_{G1} = m_1 a$ (5)

$T_2 - N_2 - F_{G2} = m_2 a$ (6)

Podpowiedź 3:

Należy zsumować równania (5) z (6) i wyznaczyć przyspieszenie

ROZWIĄZANIE:

Obliczanie wielkości przyspieszenia:

Dodajemy równania (5) i (6):

$2T_2 - F_{G1} - F_{G2} = (m_1 + m_2)a$

Wyznaczamy przyspieszenie:

$$a = \frac{2T_1 - F_{G1} - F_{G2}}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{2T_1 - m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{2T_1}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{2T_1}{m_1 + m_2} - g \qquad (7)$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$a = (\frac{2 * 600N}{32kg + 64kg} - 9{,}81)\frac{m}{s^2}$$

$$a = (12{,}5 - 9{,}81)\frac{m}{s^2} = 2{,}69\frac{m}{s^2} \qquad (8)$$

Uwaga: wielkość przyspieszenia jest wartością dodatnią. Oznacza to, że układ porusza się wzdłuż osi OY do góry. Gdyby układ poruszał się w dół wartość przyspieszenia byłaby ujemna.

Podpowiedź 4:
Siłę nacisku wywieraną przez chłopca na krzesło, można wyznaczyć z równania (6).

ROZWIĄZANIE:
Obliczamy wielkość siły nacisku N_2 .
Z równania (6) wyznaczamy siłę nacisku N_2.

$$N_2 = T_2 - F_{G2} - m_2 a$$
$$N_2 = T_2 - m_2 g - m_2 a$$

Podstawiamy za przyspieszenie wyrażenie z równania (7):

$$N_2 = T_2 - m_2 g - m_2(\frac{2T_1}{m_1 + m_2} - g)$$
$$N_2 = T_2 - \frac{2T_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$N_2 = \frac{T_2 m_1 + T_2 m_2 - 2T_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$N_2 = \frac{T_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$N_2 = \frac{600N(64 - 32)kg}{(64 + 32)kg} = \frac{600N}{3} = 200N$$

Odpowiedź:
Przyspieszenie, z jakim porusza się chłopiec:

$$a = \frac{2T_1}{m_1 + m_2} - g = 2{,}69\frac{m}{s^2}$$

Przyspieszenie jest skierowane do góry.
Wielkość siły nacisku wywieranej przez chłopca na krzesło wynosi:

$$N_2 = T_2\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 200N$$

2.13. Dziewczynka ciągnie sanki

Dziewczynka ciągnie sanki o masie 20 kg po płaskim zaśnieżonym chodniku. Szybkość sanek jest stała. Współczynnik tarcia dynamicznego między płozami a chodnikiem wynosi 0,1; kąt pomiędzy sznurkiem a chodnikiem wynosi 30°. Wyznacz:

1) przyspieszenie sanek

2) wartość siły, którą dziewczynka działa na sanki

3) wartość siły nacisku, którą sanki działają na chodnik

4) wartość siły tarcia działającej na sanki

http://physicstasks.eu

Zapis danych

m = 20 kg	masa sanek
f_d = 0,1	współczynnik tarcia dynamicznego między płozami a chodnikiem
φ = 30°	kąt pomiędzy sznurkiem a chodnikiem
a = ? (m s^{-2})	przyspieszenie sanek
T = ? (N)	wartość siły, którą dziewczynka działa na sanki
N = ? (N)	wartość siły nacisku sanek na chodnik
F_t = ? (N)	wartość siły tarcia działającej na sanki

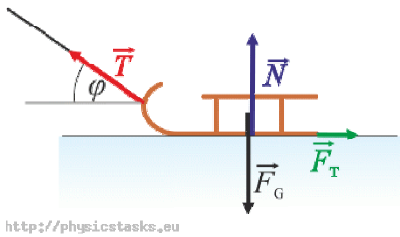
Podpowiedź 1

Zastanów się, co oznacza warunek stałej szybkości - jakie to ma konsekwencje, jeśli chodzi o przyspieszenie (a więc i siłę wypadkową). Naszkicuj ilustrację, zaznaczając na niej wszystkie siły działające na sanki. Wykorzystaj 2. zasadę dynamiki Newtona ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$) i napisz równanie ruchu dla sanek.

ROZWIĄZANIE

Przyspieszenie sanek:

Ponieważ szybkość sanek jest stała, ich przyspieszenie wynosi zero ($\vec{a} = 0$).



Siły działające na sanki:

$\vec{F_G}$ siła ciężkości

$\vec{N}$ siła reakcji, którą chodnik działa na sanki

$\vec{T}$ poszukiwana siła ciągu, z jaką dziewczynka ciągnie sanki

$\vec{F_t}$ siła tarcia pomiędzy sankami a chodnikiem

Równanie ruchu dla sanek:

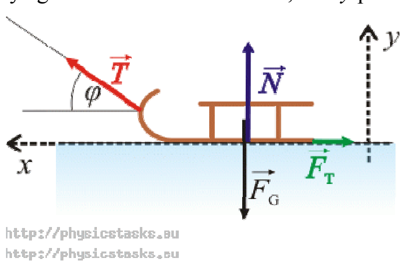
$$\vec{F_G} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F_t} = m\vec{a} = 0 \qquad (1)$$

<u>*Podpowiedź 2*</u>

Równanie ruchu powinniśmy zapisać skalarnie. Wprowadźmy układ współrzędnych, znajdźmy składowe sił w kierunkach osi układu i zapiszmy dla tych składowych równania ruchu.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Oś x przyjmiemy zgodnie z kierunkiem ruchu, a oś y prostopadle do podłoża.



Dla składowych wzdłuż osi x:

$$T\cos\varphi - F_t = 0 \qquad (2)$$

Dla składowych wzdłuż osi y:

$$N + T\sin\varphi - F_G = 0 \qquad (3)$$

Uwaga:

Zwykle przyjmujemy jedną z osi zgodnie z kierunkiem ruchu, a drugą prostopadle.

<u>*Podpowiedź 3*</u>

Zastanów się, od czego zależy wartość siły ciągu i jak możemy ją wyznaczyć.

ROZWIĄZANIE

Siłę tarcia wyznaczymy na podstawie siły nacisku sanek na chodnik, która zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona jest równa sile reakcji chodnika na sanki.

Siłę tarcia F_t możemy więc zapisać jako:

$$F_t = N f_d \qquad (4)$$

Siłę N reakcji chodnika na sanki, otrzymamy z równania (3):

$$N = mg - T\sin\varphi \qquad (5)$$

Z równań (4) i (5) uzyskamy:

$$F_t = f_d(mg - T\sin\varphi) \qquad (6)$$

Wielkość (6) podstawiamy do równania (2):

$$T\cos\varphi - f_d(mg - T\sin\varphi) = 0$$

$$T\cos\varphi - f_d mg + f_d T\sin\varphi = 0$$

$$T(\cos\varphi + f_d\sin\varphi) - f_d mg = 0 \qquad (7)$$

Z równania (7) pozostaje już tylko wyrazić siłę ciągu:

$$T = \frac{mgf_d}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi} \qquad (8)$$

Podpowiedź 4

Siła, którą sanki naciskają na chodnik, jest zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona równa sile, którą chodnik działa na sanki. Wartość siły N, którą chodnik działa na sanki, została już określona w równaniu (5):

$$N = mg - T\sin\varphi$$

Trzeba jeszcze podstawić wyrażenie na siłę ciągu.

ROZWIĄZANIE

Siła N, którą chodnik działa na sanki, jest określona równaniem (5):

$$N = mg - T\sin\varphi$$

Podstawimy za T wyrażenie (8), otrzymując:

$$N = mg - \frac{mgf_d}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}\sin\varphi = mg\left(1 - \frac{f_d\sin\varphi}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}\right) = mg\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + f_d\sin\varphi}\right) = mg\left(\frac{1}{1 + f_d\tan\varphi}\right) \quad (9)$$

Podpowiedź 5

Wartość siły tarcia F_t została już określona wzorem (4):

$$F_t = N f_d$$

Wystarczy podstawić wyrażenie na siłę nacisku.

ROZWIĄZANIE

Siłę tarcia F_t określamy wzorem (4): $F_t = N f_d$

Podstawmy do równania (4) za N wyrażenie z równania (9), otrzymamy:

$$F_t = mg(\frac{1}{1+f_d \tan\varphi})f_d \qquad (10)$$

Uwaga: Siła tarcia F_t nie jest juz określona jako mgf_d, gdyż ciągnięcie za sznurek przy sankach zmniejsza siłę nacisku na chodnik, *N* jest więc mniejsze niż *mg*.

ROZWIĄZANIE LICZBOWE CZĘŚCI 1 - przyspieszenie sanek

Ponieważ prędkość sanek jest stała, nie zmienia się w czasie, zgodnie z definicją przyspieszenie sanek jest więc równe zeru ($a = 0$)

Odpowiedź: Przyspieszenie sanek *a* wynosi zero.

ROZWIĄZANIE LICZBOWE CZĘŚCI 2 - wartość siły ciągu

Do równania (8) podstawiamy dane:

$$T = \frac{20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}{cos30^o + 0{,}1 \cdot sin30^o} N = \frac{19{,}62}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}1 \cdot 0{,}5} \mathrm{N}$$

$T = 21{,}4\mathrm{N}$

Odpowiedź: Wartość siły ciągu *T*, z jaką dziewczynka ciągnie sanki, wynosi 21,4 N.

ROZWIĄZANIE LICZBOWE CZĘŚCI 3 - wartość siły reakcji

Podstawmy dane do równania (9):

$$N = 20 \cdot 9{,}81 \left(\frac{1}{1 + 0{,}1 \tan 30^o}\right) N = 196{,}2 \left(\frac{1}{1 + 0{,}1 \frac{\sqrt{3}}{3}}\right) N$$

Odpowiedź: Wartość siły reakcji *N*, którą chodnik działa na sanki, wynosi 185,5 N.

ROZWIĄZANIE LICZBOWE CZĘŚCI 4 - wartość siły tarcia

Do równania (10) podstawmy dane:

$$F_t = 20 \cdot 9{,}81 \left(\frac{1}{1 + 0{,}1 \tan 30^o}\right) 0{,}1\, N = 19{,}62 \left(\frac{1}{1 + 0{,}1 \frac{\sqrt{3}}{3}}\right) N = 18{,}6\, N$$

Odpowiedź: Wartość siły tarcia F_t działającej na sanki wynosi 18,6 N.

PEŁNA ODPOWIEDŹ

1) Przyspieszenie sanek *a* wynosi zero.

2) Wartość siły ciągu, którą dziewczynka działa na sanki wynosi

$$T = \frac{mgf_d}{cos\varphi + f_d sin\varphi} = 21{,}4N$$

3) Wartość siły nacisku sanek na chodnik wynosi

$$mg\left(\frac{1}{1 + f_d \tan\varphi}\right) = 185{,}5N$$

4) Wartość siły tarcia działającej na sanki wynosi

$$F_t = mg\left(\frac{1}{1 + f_d \tan\varphi}\right) f_d = 18{,}6N$$

2.14. Kulka na równi

Kulka stalowa znajdująca się na górze spoczywającej, gładkiej równi pochyłej, zaczęła poruszać się w dół równi z przyspieszeniem 0,5 ms^{-2}. Kiedy znalazła się już na dole równi poruszała się dalej po poziomym stoliku. W ciągu 12 s pokonała drogę całkowitą 20 metrów. Oblicz czas ruchu kulki na równi pochyłej. Siłę tarcia można pominąć.

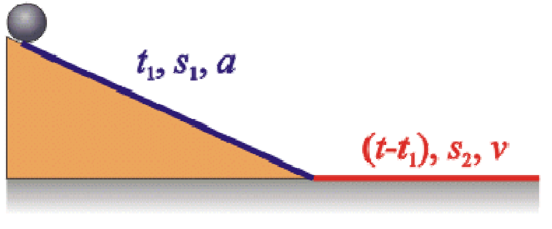
Podpowiedź 1: Wypisz dane, które znamy z treści zadania.

ROZWIĄZANIE:

$a = 0{,}5\ m\cdot s^{-2}$ - przyspieszenie kulki na równi pochyłej,
$s = 20\ m$ - całkowita droga jaką pokonała kulka na równi pochyłej i poziomym stoliku,
$t = 12\ s$ - całkowity czas ruchu kulki,
$t_1 = ?\ (s)$ - czas ruchu kulki na równi pochyłej.

Podpowiedź 2: Narysuj rysunek schematyczny i zaznacz na nim wszystkie wielkości. Jaką drogę pokona kulka na równi pochyłej i jaka będzie jej prędkość na końcu równi?

ROZWIĄZANIE:



Kulka porusza się po równi pochyłej ruchem jednostajnie przyspieszonym i pokonuje w czasie t_1 drogę s_1 oraz uzyskuje prędkość v:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$$

$$v = at_1$$

Podpowiedź 3: Ruch kulki po poziomym stoliku. Jakim rodzajem ruchu porusza się kulka?

ROZWIĄZANIE:

Po poziomym stoliku kulka porusza się ruchem jednostajnym z prędkością v. Drogę pokonaną przez kulkę w czasie $t-t_1$ na poziomym stoliku s_2 można zapisać następująco:

$$s_2 = v(t-t_1) = at_1(t-t_1)$$

Podpowiedź 4: Całkowita droga pokonana przez kulkę.

ROZWIĄZANIE:

Kulka po równi pochyłej poruszała się ruchem jednostajnie przyspieszonym i pokonała drogę s_1, natomiast po poziomym stoliku poruszała się ruchem jednostajnym i pokonała drogę s_2.

Zapiszmy wzór na drogę całkowitą:

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1(t - t_1)$$

Po opuszczeniu nawiasów możemy napisać:

$$s = -\frac{1}{2}at_1^2 + at_1 t \qquad /\cdot 2 \quad /:a$$

Zapisujemy równanie kwadratowe:

$$t_1^2 - 2tt_1 + \frac{2s}{a} = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe i wybieramy rozwiązanie spełniające następujący warunek $t_1 < t$, tzn. czas ruchu kulki na równi pochyłej musi być krótszy od czasu całkowitego ruchu na równi i poziomym stoliku.

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}}$$

Podstawiając dane liczbowe do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$t_1 = (12 - \sqrt{12^2 - \frac{2 \cdot 20}{0{,}5}})s = 4s$$

<u>Odpowiedź</u>

Czas ruchu kulki na równi pochyłej wynosi:

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} = 4s\ .$$

[Opracowanie AK]

2.15. Ciężarówka na stoku

Ciężarówka jedzie z góry ze stałą prędkością 30 km·h^{-1}. Masa samochodu wynosi 5 t. Samochód hamuje silnikiem, całkowita siła hamowania ma wartość 4400 N. Wyznacz kąt nachylenia stoku góry.

Zapis danych

m = 5 t	masa samochodu
F_b = 4400 N	siła hamowania
v = 30 km·h^{-1}	prędkość samochodu
α = ? (°)	kąt nachylenia stoku

Podpowiedź 1

Jakie siły działają na samochód? Jaki jest ich kierunek i zwrot? Sporządź pomocniczy rysunek.

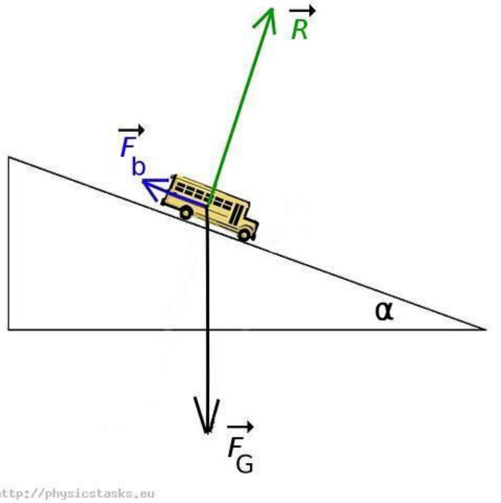
ROZWIĄZANIE

Na samochód działają trzy siły:

1) Siła ciężkości $\overrightarrow{F_G}$ skierowana pionowo w dół.

2) Siła reakcji podłoża $\vec{R}$ (samochód naciska na podłoże, a zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona podłoże działa na samochód). Skierowana jest prostopadle do podłoża.

3) Siła hamująca $\overrightarrow{F_b}$, skierowana wzdłuż podłoża, przeciwnie do kierunku ruchu.



Podpowiedź 2

Co możemy powiedzieć na temat wymienionych sił w myśl 1. zasady dynamiki Newtona?

ROZWIĄZANIE

Ponieważ samochód porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, siła wypadkowa, czyli suma wymienionych sił musi dawać zero (wektor zerowy):

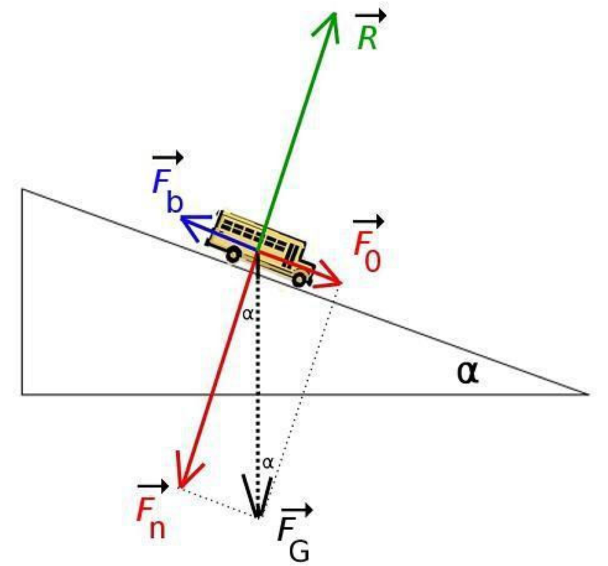
$$\overrightarrow{F_G} + \vec{R} + \overrightarrow{F_b} = \vec{0}$$

Podpowiedź 3

Rozłóż siłę ciężkości $\overrightarrow{F_G}$ na składowe równoległą i prostopadłą do podłoża. Jakie warunki spełniać powinny te składowe w myśl 1. zasady dynamiki Newtona?

ROZWIĄZANIE

Rozkład siły ciężkości $\overrightarrow{F_G}$ na składowe $\overrightarrow{F_0}$ a $\overrightarrow{F_n}$ pokazuje rysunek:



Z 1. zasady dynamiki Newtona wynika, że sumy poszczególnych składowych - równoległych i prostopadłych do kierunku ruchu - muszą się zerować. Spełnione więc będą warunki:

$$\overrightarrow{F_n} + \vec{R} = \vec{0} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{F_0} + \overrightarrow{F_b} = \vec{0} \tag{2}$$

Ponieważ siły $\overrightarrow{F_n}$ i $\vec{R}$ mają przeciwny zwrot, podobnie jak $\overrightarrow{F_0}$ i $\overrightarrow{F_b}$, możemy dla wartości tych składowych zapisać:

$$F_N - R = 0 \tag{3}$$

$$F_0 - F_b = 0 \tag{4}$$

Do dalszych obliczeń wykorzystamy równanie (4).

Podpowiedź 4

Spróbuj wyrazić składową F_0 za pomocą siły ciężkości. Wykorzystaj związki trygonometryczne oraz daną wartość siły F_b do określenia z równania (4) kąta α.

ROZWIĄZANIE

Z trygonometrii (patrz rysunek wyżej):

$$\sin\alpha = \frac{F_0}{F_G}$$

Zatem: $$F_0 = F_G \sin\alpha \qquad (5)$$

Siłę ciężkości F_G możemy wyrazić za pomocą masy samochodu m:

$$F_G = mg, \qquad (6)$$

gdzie g to przyspieszenie grawitacyjne. Podstawiając (6) do (5) otrzymamy:

$$F_0 = mg\sin\alpha \qquad (7)$$

Wreszcie wykorzystując (4) i (7) otrzymujemy równanie:

$$mg\sin\alpha - F_b = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{F_b}{mg}$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$F_b = 4400N$$

$$m = 5t = 5000kg$$

$$g = 9{,}81m \cdot s^{-2}$$

$$\sin\alpha = \frac{4400}{5000 \cdot 9{,}81} = 0{,}09$$

Warto zauważyć, że kąt nachylenia nie zależy od prędkości samochodu, ale od siły hamowania.

Odpowiedź

$$\sin\alpha = \frac{F_b}{mg} = 0{,}09 \Rightarrow \alpha = 5^o8'$$

Stok nachylony jest pod kątem ok. $5^o8'$.

2.16. Wózek na torze powietrznym

Wózek na torze powietrznym ma masę m_v = 250 g i jest przyspieszany przez pociągnięcie za sznurek przerzucony przez bloczek. Porównaj wartości przyspieszenia wózka, gdy

a) ciągniemy za sznurek siłą 0,1 N

b) zawiesimy na sznurku ciało o ciężarze 0,1 N

Opór powietrza oraz masy sznurka i bloczku pomijamy.

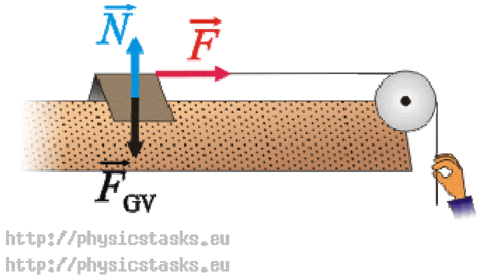
Uwaga: Tor powietrzny to urządzenie, na którym możliwy jest ruch wózka bez tarcia. Wdmuchiwany od dołu strumień powietrza unosi wózek.

Podpowiedź 1a

Naszkicuj rysunek zaznaczając siły działające na wózek w przypadku, gdy ciągniemy za sznurek siłą o wartości 0,1 N. Zapisz równanie ruchu dla wózka.

ROZWIĄZANIE

Siły działające na wózek w przypadku a):



$\vec{F}$ siła, którą ręka działa na wózek za pośrednictwem sznurka

$\vec{N}$ siła działania strumienia powietrza na wózek

$\overrightarrow{F_{Gv}}$ siła ciężkości działająca na wózek

Równanie ruchu:

$$\overrightarrow{F_{Gv}} + \vec{N} + \vec{F} = m_v\overrightarrow{a_1} \qquad (1)$$

m_v masa wózka

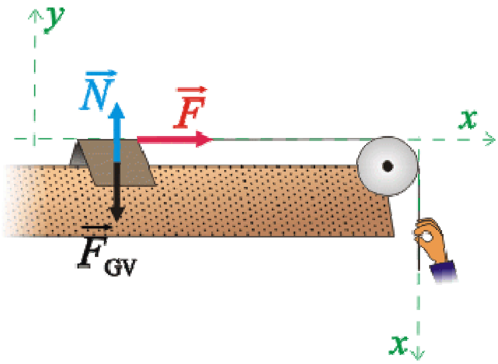
$\overrightarrow{a_1}$ przyspieszenie wózka

Podpowiedź 2a

Równanie ruchu z punktu (1) zapisz skalarnie i wyprowadź wzór na przyspieszenie a_1.

ROZWIĄZANIE

Aby zapisać równania ruchu skalarnie, wprowadźmy układ odniesienia. Oś x prowadzimy wzdłuż kierunku ruchu pojazdu. Oś y jest prostopadła do osi x.



Zapisujemy równania ruchu skalarnie:

$$x: F = m_v a_1 \quad (2)$$

$$y: N - F_{Gv} = 0 \quad (3)$$

Pojazd nie porusza się wzdłuż osi y, dlatego składowa pionowa siły wynosi zero.

Z równania (2) uzyskamy wartość przyspieszenia a_1:

$$a_1 = \frac{F}{m_v} \quad (5)$$

Podstawiając wartości liczbowe:

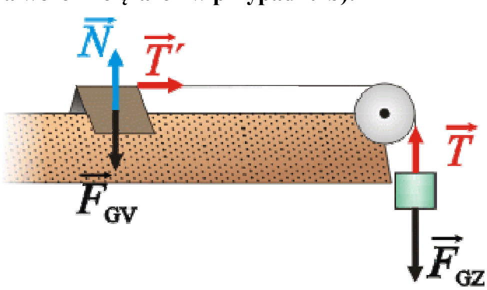
$$a_1 = \frac{0{,}1}{0{,}25} m \cdot s^{-2} = 0{,}4\, m \cdot s^{-2} \quad (6)$$

<u>Podpowiedź 1b</u>

Sporządź rysunek uwzględniający siły działające na pojazd i ciężarek. Zapisz równania ruchu dla pojazdu i ciężarka.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Siły działające na wózek i ciężarek w przypadku b):



Wózek:

$\vec{N}$ siła którą strumień powietrza działa od spodu na wózek

$\overrightarrow{F_{Gv}}$ siła ciężkości wózka

$\vec{T'}$ siła, z jaką ciężarek za pośrednictwem sznurka działa na wózek

Ciężarek:

$\overrightarrow{F_{Gz}}$ siła ciężkości

$\vec{T}$ siła, z jaką wózek za pośrednictwem sznurka działa na ciężarek

Równania ruchu:

Równanie ruchu dla wózka:

$$\overrightarrow{F_{Gv}} + \vec{N} + \vec{T'} = m_v\overrightarrow{a_2} \quad (7)$$

Równanie ruchu dla ciężarka:

$$\overrightarrow{F_{Gz}} + \vec{T} = m_z\overrightarrow{a_2} \quad (8)$$

m_v masa wózka

m_z masa ciężarka

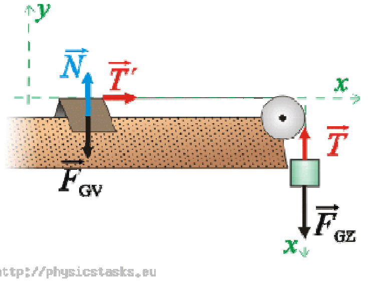
$\overrightarrow{a_2}$ przyspieszenie wózka i ciężarka

Podpowiedź 2b

Równania ruchu (7) i (8) zapisz skalarnie. Zastanów się, co możemy powiedzieć o siłach naciągu sznurka T *i* T'.

ROZWIĄZANIE

Aby równania ruchu zapisać skalarnie, wprowadzimy układ odniesienia. Oś x prowadzimy wzdłuż kierunku ruchu wózka (i dalej ciężarka). Oś y jest prostopadła do osi x.



Równania ruchu skalarnie:

Równanie ruchu wózka:

$$x: T = m_v a_2 \quad (9)$$

$$y: N - F_{Gv} = 0 \quad (10)$$

Wózek nie porusza się wzdłuż osi y, dlatego suma sił pionowych wynosi zero.

Równanie ruchu ciężarka:

$$x: F_{Gz} - T = m_z a_2 \quad (11)$$

Ponieważ zaniedbujemy masę bloczka (a co za tym idzie - jego moment bezwładności), możemy w oparciu o 3. zasadę dynamiki Newtona zapisać:

$$|\vec{T}| = |\vec{T'}|$$

Przepiszmy równanie (9):

$$T = m_v a_2 \quad (12)$$

<u>Podpowiedź 3b</u>

Korzystając z równań (11) i (12) określ wartość przyspieszenia a_2.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Sumując równania (11) i (12):

$$F_{Gz} = m_z a_2 + m_v a_2$$

$$F_{Gz} = (m_z + m_v) a_2$$

$$a_2 = \frac{F_{Gz}}{(m_z + m_v)}$$

Masa ciężarka to $m_z = \frac{F_{Gz}}{g}$, tak więc:

$$a_2 = \frac{F_{Gz}}{(\frac{F_{Gz}}{g} + m_v)} \quad (13)$$

Do wyrażenia (13) podstawiamy wartości liczbowe:

$$a_2 = \frac{0{,}1}{(\frac{0{,}1}{10} + 0{,}25)} m \cdot s^{-2} = \frac{0{,}1}{0{,}26} \, m \cdot s^{-2} = 0{,}38 m \cdot s^{-2} \quad (14)$$

<u>Komentarz</u>

Wartość przyspieszenia a_1 jest większa niż przyspieszenia a_2. To dlatego, że w pierwszym przypadku siła o wartości 0,1 N działa bezpośrednio na wózek i tylko jemu nadaje przyspieszenie. W drugim przypadku siła 0,1 N, równa ciężarowi zawieszonego ciała, nadaje przyspieszenie nie tylko wózkowi, ale i samemu ciężarkowi.

<u>ODPOWIEDŹ</u>

Wartość przyspieszenia wózka, ciągniętego ręką za sznurek z siłą 0,1 N, wynosi

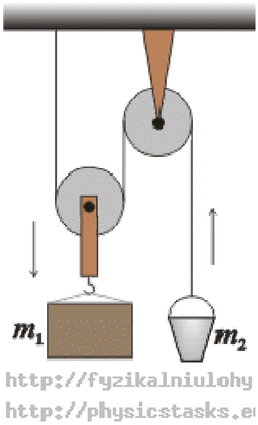
$$a_1 = F / m_v = 0{,}4 m s^{-2}$$

Wartość przyspieszenia wózka, po zawieszeniu na sznurku ciała o ciężarze 0,1 N, wynosi

$$a_2 = \frac{F_{Gz}}{\frac{F_{Gz}}{g} + m} + m_v = 0{,}38 m \cdot s^{-2}$$

2.17. Bloczki

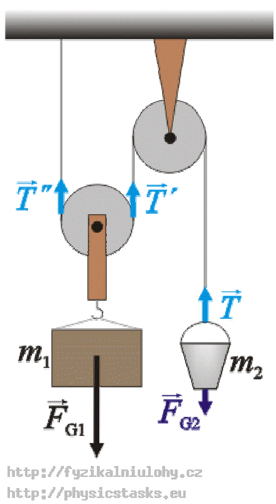
Na rysunku poniżej przedstawiono dwa krążki, blok o masie m_1 i wiadro o masie m_2. Oblicz wartość przyspieszenia, z którym porusza się wiadro i blok oraz wartość siły naprężenia liny T. Nie uwzględniamy masy krążków i liny. Wiadro porusza się w górę, a blok w dół.



Podpowiedź 1

Narysuj siły działające na wiadro i na blok. Napisz dwa równania ruchu dla wiadra i bloku.

ROZWIĄZANIE



Siły działające na wiadro o masie m_2:

$\overrightarrow{F_{G2}}$ siła grawitacji

$\vec{T}$ siła, która działa na wiadro pionowo do góry

Siły działające na blok o masie m_1:

$\overrightarrow{F_{G1}}$ siła grawitacji

$\vec{T'}$ siła która działa na krążek pionowo do góry

$\vec{T''}$ siła która działa na krążek pionowo do góry

Równanie ruchu dla wiadra:

$$\overrightarrow{F_{G2}} + \vec{T} = m_2\overrightarrow{a_2} \quad (1)$$

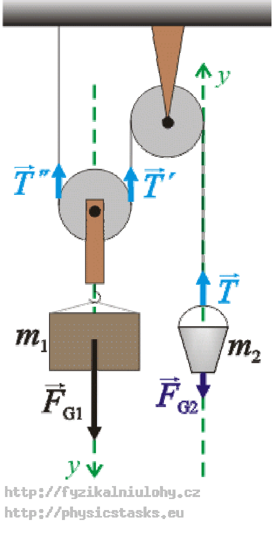
Równanie ruchu dla bloku:

$$\overrightarrow{F_{G1}} + \vec{T'} + \vec{T''} = m_1\overrightarrow{a_1} \; (2)$$

Podpowiedź 2

Wybierz układ współrzędnych (odniesienia) i napisz równania ruchu. Zastanów się, jakie będą relacje między wektorami T, T' i T''.

ROZWIĄZANIE



Obierzmy oś y, jak pokazano na rysunku. Przepiszmy równania (1) i (2) w postaci skalarnej:

$$T - F_{G2} = m_2a_2 (3)$$

$$F_{G1} - T' - T'' = m_1a_1 \; (4)$$

Mas krążków nie uwzględniamy, dlatego też nie mają one wpływu na naprężenie lin. Siły działające na liny mają takie same wartości:

$$|\vec{T}| = |\vec{T'}| = |\vec{T''}|$$

Możemy przepisać równania (3) i (4):

$$T - F_{G2} = m_2 a_2 \ (5)$$

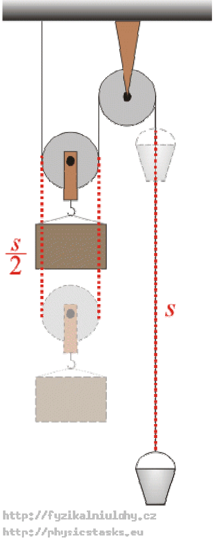
$$F_{G1} - 2T = m_1 a_1 \ (6)$$

Podpowiedź 3

Zastanów się jakie są wartości przyspieszeń a_1 *i* a_2*. Wyobraźmy sobie że wiadro pokonało drogę s, blok pokonał w tym czasie odległość* s/2.

ROZWIĄZANIE

Związek między wartościami przyspieszeń a_1 i a_2:



Wiadro pokonuje drogę s, natomiast blok w tym samym czasie pokonuje drogę $s/2$.

$$s = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

Pierwsze równanie dzielimy przez drugie równanie:

$$2 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_2 = 2a_1 \ (7)$$

Równania (5) i (6) możemy teraz zapisać następująco:

$$T - m_2 g = m_2 2a_1 \ (8)$$

$$m_1 g - 2T = m_1 a_1 \ (9)$$

Podpowiedź 4

Mamy dwa równania (8) i (9) z dwiema niewiadomymi T *i* a_1*. Rozwiąż równania wykorzystując (7) i oblicz* a_2*.*

ROZWIĄZANIE

Otrzymujemy dwa równania (8) i (9), z dwiema niewiadomymi a_1 i siłą T. Pierwsze równanie mnożymy przez 2 i równania dodajemy stronami.

$$T - m_2 g = m_1 a_1 / \cdot 2$$

$$m_1 g - 2T = m_1 a_1$$

Otrzymujemy:

$$m_1 g - 2m_2 g = m_1 a_1 + 4m_2 a_1$$

$$(m_1 - 2m_2)g = (m_1 + 4m_2)a_1$$

$$a_1 = \frac{(m_1 - 2m_2)g}{(m_1 + 4m_2)} \ (10)$$

Zgodnie z równaniem (7) możemy zapisać:

$$a_2 = 2a_1 = \frac{2(m_1 - 2m_2)g}{(m_1 + 4m_2)} = \frac{(2m_1 - 4m_2)g}{(m_1 + 4m_2)} \ (11)$$

Wartość siły T obliczymy korzystając ze wzoru (8):

$$T - m_2 g = m_2 2a_1$$

$$T = m_2 2a_1 + m_2 g = m_2 \frac{(2m_1 - 4m_2)g}{(m_1 + 4m_2)} + m_2 g$$

$$T = \frac{(2m_1 m_2 - 4m_2^2)g}{(m_1 + 4m_2)} + m_2 g = \frac{(2m_1 m_2 - 4m_2^2 + m_2(m_1 + 4m_2))g}{(m_1 + 4m_2)}$$

$$T = \frac{(2m_1 m_2 - 4m_2^2 + m_1 m_2 + 4m_2^2)g}{(m_1 + 4m_2)}$$

$$T = \frac{(3m_1 m_2)g}{(m_1 + 4m_2)} \ (12)$$

Odpowiedź

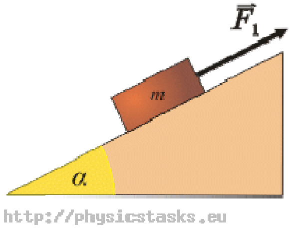
Wartość przyspieszenia bloku wynosi $a_1 = \frac{(m_1 - 2m_2)g}{(m_1 + 4m_2)}$

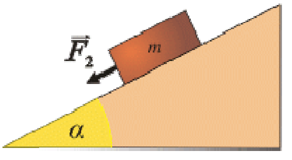
Wartość przyspieszenia wiadra wynosi $a_2 = 2a_1 = \frac{(2m_1 - 4m_2)g}{(m_1 + 4m_2)}$

Wartość siły T naciągu liny wynosi $T = \frac{(3m_1 m_2)g}{(m_1 + 4m_2)}$

2.18. Klocek na równi pochyłej

Klocek możemy przesuwać po równi ruchem jednostajnym z dołu do góry używając siły F_1, zaś z góry na dół - używając siły F_2. Wyznacz współczynnik tarcia f klocka o równię, jeśli $F_1 = 6F_2$, a obie siły są równoległe do powierzchni równi, która z kolei tworzy z poziomem kąt $\alpha = 15°$.





Podpowiedź 1

Naszkicuj rysunek i zaznacz na nim wszystkie siły działające na klocek:

1) Klocek przesuwamy siłą F_1 w górę.

2) Klocek przesuwamy siłą F_2 w dół.

Zapisz równanie ruchu dla każdego z tych przypadków.

ROZWIĄZANIE

Siły działające na klocek:

Na klocek w obu przypadkach działają następujące siły:

$\vec{F_G}$ siła ciężkości (ciężar)

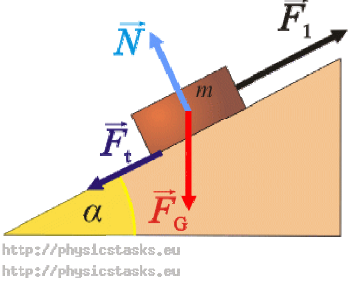
$\vec{F}_1$ $(\vec{F_2})$ siła, którą działamy na klocek

$\vec{N}$ siła reakcji podłoża

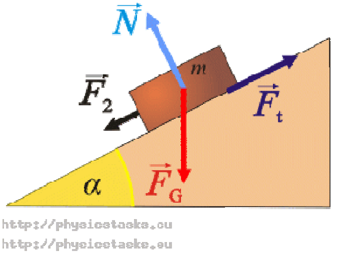
$\vec{F_t}$ siła tarcia

Kierunek i zwrot sił zaznaczono na rysunkach.

Ruch w górę:



Ruch w dół:



Równania ruchu:

Ruch w górę:

$$\vec{F_G} + \vec{N} + \vec{F_1} + \vec{F_t} = m\vec{a_1} = 0$$

Ruch w dół:

$$\vec{F_G} + \vec{N} + \vec{F_2} + \vec{F_t} = m\vec{a_2} = 0$$

Obydwa ruchy są jednostajne, przyspieszenie w obu przypadkach wynosi zero.

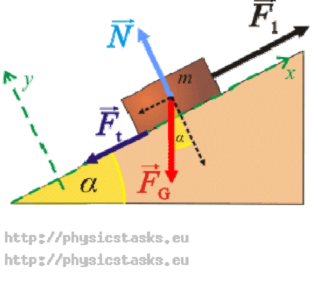
Równania ruchu skalarnie:

Wprowadźmy układ współrzędnych tak, by oś x miała kierunek wzdłuż równi. Oś y jest prostopadła do osi x.

Siłę F_G rozłóżmy na 2 składowe:

$$F_{Gx} = F_G \sin\alpha$$
$$F_{Gy} = F_G \cos\alpha$$

Ruch w górę:

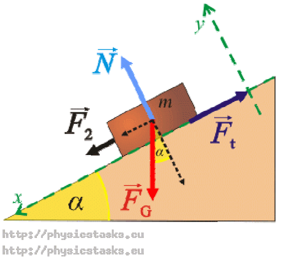


Dla ruchu w górę:

$$x:\ -F_G \sin\alpha + F_1 - F_t = 0 \qquad (1)$$

$$y: N - F_G cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Ruch w dół:



Dla ruchu w dół:

$$x: F_G \sin\alpha + F_2 - F_t = 0 \qquad (3)$$

$$y: N - F_G cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

Podpowiedź 2

Zastanów się, od czego zależy siła tarcia i jak możemy ją obliczyć. Podstaw wyrażenie na siłę tarcia do równań ruchu (1) i (3). Otrzymasz 2 równania z dwiema niewiadomymi. Określ z nich współczynnik tarcia.

ROZWIĄZANIE

Siła tarcia:

Siła tarcia zależy od siły nacisku klocka na równię. Ta z kolei, zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona, odpowiada sile reakcji, z jaką równia działa na klocek. Zapiszmy to przy pomocy równań: $F_t = fN$

Siłę N określimy z równania (2): $N = F_G cos\alpha$

Na siłę tarcia uzyskamy: $F_t = fF_G \cos\alpha$ (5)

Obliczenie współczynnika tarcia:

Podstawmy do równań ruchu (1) i (3) wyrażenie na siłę tarcia. Za siłę F_1 podstawmy $6F_2$.

$$-F_G \sin\alpha + 6F_2 - F_G f cos\alpha = 0 \qquad (6)$$

$$F_G \sin\alpha + F_2 - F_G f cos\alpha = 0 \qquad (7)$$

Równanie (7) pomnóżmy obustronnie przez 6 i odejmijmy od równania (6):

$$-F_G \sin\alpha + 6F_2 - F_G f cos\alpha = 0$$

$$6F_G \sin\alpha + 6F_2 - 6F_G f cos\alpha = 0$$

$$7F_G \sin\alpha - 5F_G f cos\alpha = 0$$

$$7F_G \sin\alpha = 5F_G f cos\alpha / : (5F_G f cos\alpha)$$

$$f = (7/5)\ \mathrm{tg}\ \alpha \qquad (8)$$

Do wzoru (8) podstawiamy dane liczbowe.

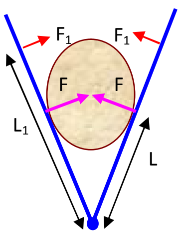
ODPOWIEDŹ

Współczynnik tarcia między klockiem a równią wynosi $f = (7/5)$ tg $\alpha = 0{,}36$.

2.19. Dziadek do orzechów

Zaprojektuj dziadka do orzechów, to znaczy najprostszy przyrząd, za pomocą którego można zgniatać orzechy.

Podpowiedź 1 Takim najprostszym przyrządem są dwa patyki, połączone zawiasem na jednym końcu a ściskane z drugiego końca. Tworzymy w ten sposób dwie dźwignie jednostronne: za pomocą pary małych sił o wartościach F_1 *można zgnieść twardy orzech.* $F_1L_1=FL$

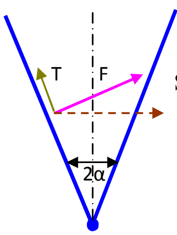


Problemem jest jednak kwestia równowagi sił działających na orzech w takim przyrządzie.

Dwie siły działające na orzech, każda o wartości F, są skierowane prostopadle do ramion dźwigni. Dwie siły *nie równoważą* się wzajemnie a ich suma ma składową w kierunku pionowym.

Przy braku innych sił, orzech wysunie się ku górze i kąt między ramionami zmniejszy się. Aby orzech nie wysuwał się, niezbędna jest dodatkowa siła. Jest nią siła tarcia między orzechem a ramionami.

Podpowiedź 2 Rozrysuj siłę F *za pomocą dwóch składowych – jednej poziomej a drugiej wzdłuż ramion*



Składowe poziome działające na orzech a pochodzące od dwóch ramion wzajemnie się równoważą.

Składowa siły F skierowana wzdłuż ramion (a oznaczona na rysunku obok przez T) wynosi

$$T = F\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Podpowiedź 3 Ile wynosi siła tarcia?

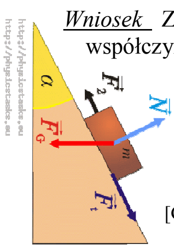
Siłę tarcia T_1 obliczymy bez trudu, wiedząc że wzajemna siła nacisku między ramieniem a orzechem wynosi F i oznaczając współczynnik tarcia przez μ.

Siła tarcia wynosi: $T_1 = \mu F$.

Aby orzech nie wysuwał się, siła T musi być równoważona przez siłę tarcia, skąd otrzymujemy warunek na kąt rozwarcia α tak, aby orzech się nie wysuwał:

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha$$

Aby orzech się nie wysuwał, kąt rozwarcia musi być nie większy niż współczynnik tarcia (statycznego). Przykładowo, współczynnikowi tarcia 0,36 odpowiada kąt rozwarcia 20°. Szczęki dziadka do orzechów mają zazwyczaj formę szczypiec, aby orzech się nie wysuwał.



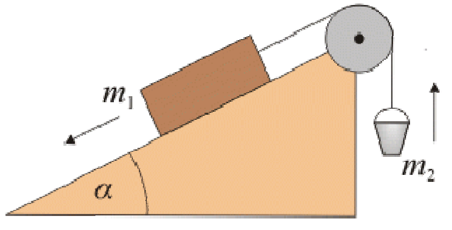
Wniosek Zaprojektowany przez nas dziadek do orzechów jest sposobem na pomiar współczynnika tarcia. Zauważ, że otrzymany wzór jest analogiczny jak wzór na maksymalne pochylenie równi, aby ciało się z niej nie zsuwało.

Na rysunku obok, równia została celowo obrócono, abyś zauważył, że dwa problemy są do siebie podobne.

[GK, wg Mazzoldi, A. Saggion, C.Voci, Problemi di fisica generale, Padova, zad. 6.69]

2.20. Skrzynka na równi pochyłej z bloczkiem obrotowym

W jakim czasie skrzynka o masie m_1 pokona drogę s zsuwając się po równi pochyłej o kącie nachylenia α, jeżeli jest ona połączona ze swobodnie zwisającym wiaderkiem o masie m_2 poprzez linę przerzuconą przez bloczek obrotowy? Stosunek mas m_1/m_2 jest taki, że skrzynka porusza się w dół po równi pochyłej. Tarcie i moment bezwładność bloczka obrotowego oraz ciężar liny można zaniedbać.



http://physicstasks.eu

<u>*Podpowiedź 1*</u>

Narysuj obrazek przedstawiający omawianą sytuację i zaznacz wszystkie siły działające na skrzynkę i wiaderko. Napisz równania ruchu dla skrzynki i wiaderka.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Siły działające na skrzynkę i wiaderko:

Na skrzynkę działają następujące siły:

$\overrightarrow{F_{G1}}$ siła ciężkości

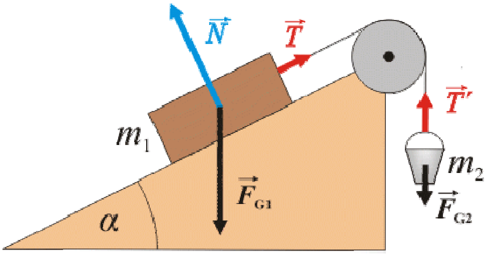
$\vec{N}$ siła reakcji podłoża

$\vec{T}$ siła naciągu liny

Na wiaderko działają następujące siły:

$\overrightarrow{F'_{G1}}$ siła ciężkości

$\vec{T'}$ siła naciągu liny



http://physicstasks.eu

Równania ruchu:

Skrzynka i wiaderko poruszają się z takim samym przyspieszeniem.

Dla skrzynki:

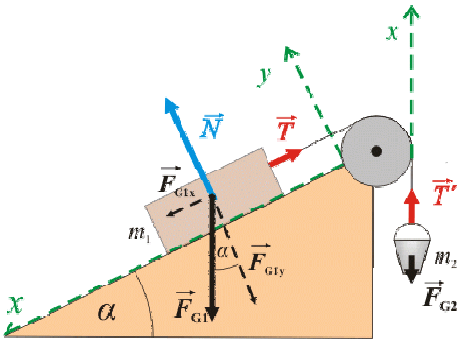
$$\overrightarrow{F_{G1}} + \vec{N} + \vec{T} = m_1\vec{a}$$

$$\overrightarrow{F_{G1}}' + \vec{N}' + \vec{T}' = m_1\vec{a}$$

Dla wiaderka:

$$\overrightarrow{F_{G2}} + \vec{T}' = m_2\vec{a}$$

Przepisujemy równania w formie skalarnej, w tym celu definiujemy układ współrzędnych *x*, *y* tak, że oś *x* jest równoległa do kierunku ruchu skrzynki (wiaderka), natomiast oś *y* jest prostopadła do osi *x*.



http://physicstasks.eu

Siłę F_{G1} rozkładamy na dwie składowe prostopadłe wzdłuż osi *x* i *y*.

$$F_{G1_x} = F_{G1}\sin\alpha$$

$$F_{G1_y} = F_{G1}\cos\alpha$$

Równania ruchu przepisujemy w formie skalarnej:

Dla skrzynki:

$$x{:}\, F_{G1}\sin\alpha - T = m_1\, a \qquad (1)$$

$$y{:}\, N - F_{G1}\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Skrzynka nie porusza się w kierunku osi *y* wobec czego składowa przyspieszenia w tym kierunku jest równa zeru.

Dla wiaderka:

$$x{:}\, T - F_{G2} = m_2 a \qquad (3)$$

Ponieważ zaniedbujemy ciężar bloczka obrotowego, możemy również pominąć wpływ jego momentu bezwładności na naciąg liny. Wobec czego wiaderko oddziałuje bezpośrednio poprzez linę na skrzynkę i odwrotnie skrzynka oddziałuje bezpośrednio na wiaderko. Zgodnie z trzecim prawem Newtona:

$$|\vec{T}| = |\vec{T}'|$$

Podstawiając za $F_{G1} = m_1 g, F_{G2} = m_2 g$ przepisujemy równania (1) i (3) w postaci:

$$m_1 g \sin\alpha - T = m_1 a \qquad (4)$$

$$T - m_2 g = m_2 a \qquad (5)$$

Podpowiedź 2

Z równań ruchu (4) i (5) wyznacz przyspieszenie skrzynki.

ROZWIĄZANIE

Otrzymujemy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi, rozwiązanie tego układu pozwala wyznaczyć przyspieszanie, z jakim porusza się skrzynka.

Sumując równania (4) i (5), otrzymujemy:

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = (m_1 \sin\alpha - m_2)g/(m_1 + m_2) \ (6)$$

Zależność (6) wyraża wielkość przyspieszenia z którym skrzynka zsuwa się po równi pochyłej.

Podpowiedź 3

Czy przyspieszenie skrzynki zależy od czasu w omawianym zadaniu? Z jakim rodzajem ruchu mamy do czynienia? Jakim wyrażeniem obliczamy drogę w ruchu, który rozpatrujemy w tym zadaniu?

ROZWIĄZANIE

Z równania (6) widzimy, że przyspieszenie jest niezależne od czasu, mówimy wówczas o ruchu jednostajnie przyspieszonym, dla takiego ruchu wzór na drogę *s* ma następującą postać:

$$s = \frac{at^2}{2} \qquad (7)$$

gdzie *t* - czas, w którym skrzynka pokona drogę *s*.

Z wyrażenia (7) wyznaczamy czas *t*:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \qquad (8)$$

Do równania (8) wstawiamy wyrażenie na przyspieszenie z równania (6):

$$t = \sqrt{\frac{2s(m_1 + m_2)}{(m_1 \sin\alpha - m_2)g}}$$

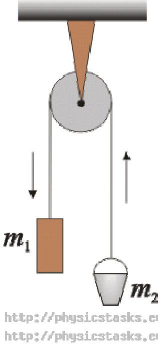
ODPOWIEDŹ

Skrzynka pokona drogę *s* na równi pochyłej w czasie

$$t = \frac{\sqrt{2s(m_1 + m_2)}}{(m_1 \sin\alpha - m_2)g}$$

2.21. Blok nieruchomy

Na bloku nieruchomym wisi ciężarek o masie $m_1 =$ 0,55 kg i wiadro o masie $m_2 = 0{,}45$ kg. Określ przyspieszenie układu i siłę, która działa na oś bloku. Zaniedbujemy masę bloku i sznurka oraz tarcie.



Podpowiedź 1

Naszkicuj rysunek i zaznacz na nim wszystkie siły działające na ciężarek i wiadro. Zapisz równania ruchu ciężarka i wiadra. Wprowadź układ współrzędnych.

ROZWIĄZANIE

Siły działające w układzie:

Masa m_1:

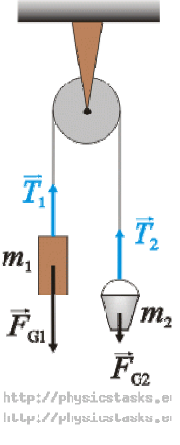
$\overrightarrow{F_{G1}}$ siła ciężkości (ciężar)

$\overrightarrow{T_1}$ siła napinająca sznurek

Masa m_2:

$\overrightarrow{F_{G2}}$ siła ciężkości (ciężar)

$\overrightarrow{T_2}$ siła napinająca sznurek



Równania ruchu:

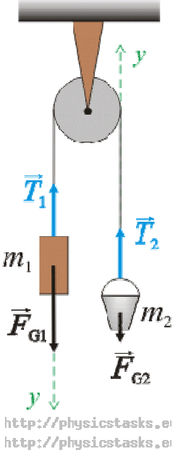
Masa m_1:

$$\overrightarrow{F_{G1}} + \overrightarrow{T_1} = m_1 a$$

Wiadro m_2:

$$\overrightarrow{F_{G2}} + \overrightarrow{T_2} = m_2 a$$

Ciężarek i wiadro poruszają się ze stałym przyspieszeniem w lewo.



Wprowadźmy oś y, jak na rysunku. Zapiszmy równania skalarnie:

$$F_{G1} - T_1 = m_1 a \qquad (1)$$

$$T_2 - F_{G2} = m_2 a \qquad (2)$$

Ponieważ zaniedbujemy masę bloczka, nie będzie żadnej dodatkowej siły ani momentu bezwładności. Ciężarek m_1 działa poprzez sznurek na wiadro m_2, a wiadro m_2 z kolei na ciężarek m_1. Zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona będziemy mieć:

$$|\overrightarrow{T_1}| = |\overrightarrow{T_2}| = |\vec{T}|$$

Podstawmy do równań (1) i (2):

$$m_1 g - T = m_1 a \qquad (3)$$

$$T - m_2 g = m_2 a \qquad (4)$$

Określenie przyspieszenia:

Dodając równania (3) i (4) otrzymamy:

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{(m_1 + m_2)} \quad (5)$$

Podstawiamy dane i obliczamy:

$$a = \frac{(0,55 - 0,45)9,81}{(0,55 + 0,45)} = 0,98m \cdot s^{-2}$$

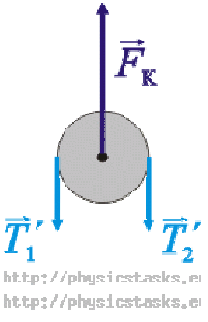
<u>Podpowiedź 2</u>

Zaznacz na rysunku wszystkie siły działające na bloczek i zastanów się, jaka jest ich wypadkowa.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Wyznaczenie siły działającej na bloczek:

Na bloczek działają po obu stronach siły napinające sznurek $\vec{T_1}\ i\ \vec{T_2}$ a także oś, na której umieszczono bloczek, siłą $\vec{F_k}$ (masę bloczka, a więc i jego ciężar, zaniedbujemy).



Przyspieszenie bloczka wynosi zero, tak więc i wypadkowa sił nań działających musi dawać zero:

$$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{F_k} = 0 \quad (6)$$

Zaniedbujemy masę bloczka, nie będzie więc uwzględniany jego moment bezwładności; pomiędzy siłami napinającymi sznurek zachodzi więc związek:

$$|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = |\vec{T}|$$

Równanie (6) przepiszmy skalarnie:

$$2T - F_k = 0$$

$$2T = F_k \quad (7)$$

Możemy teraz wyznaczyć z równania (3) lub (4):

$$F_k = 2m_2(a + g) = 2m_1(g - a) \quad (8)$$

Podstawmy do równania (8) dane liczbowe:

$$F_k = 2 \cdot 0,45(9,81 + 0,98)N = 2 \cdot 0,55(9,81 - 0,98)N$$

$$F_k = 0,9 \cdot 10,79N = 1,1 \cdot 8,83N = 9,71N$$

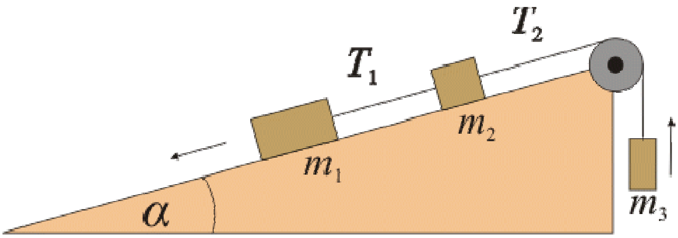
ODPOWIEDŹ

Przyspieszenie układu wynosi $a = 0,98\ m \cdot s^{-2}$.

Siła działająca na bloczek $F_k = 9,71$ N.

2.22. Równia pochyła - trzy ciała

Układ przedstawiony na rysunku zjeżdża w dół po równi pochyłej. Określ wartość przyspieszenia układu oraz sił napinających nici T_1, T_2. Współczynnik tarcia pomiędzy ciałami i powierzchnią równi wynosi f. Zaniedbujemy moment bezwładności bloczka i masę sznurka.



http://physicstasks.eu

<u>Podpowiedź 1</u>

Naszkicuj rysunek i zaznacz, jakie siły działają na ciało umieszczone na równi pochyłej. Zapisz odpowiednie równanie ruchu.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Siły działające na ciała:

Na pierwsze ciało o masie m_1 działają siły:

$\overrightarrow{F_{G1}}$ ciężar ciała

$\overrightarrow{N_1}$ siła reakcji podłoża

$\overrightarrow{T_1}$ siła napinająca pierwszy sznurek

$\overrightarrow{F_{t1}}$ siła tarcia

Na drugie ciało o masie m_2 działają siły:

$\overrightarrow{F_{G2}}$ ciężar ciała

$\overrightarrow{N_2}$ siła reakcji podłoża

$\overrightarrow{T_2}$ siła napinająca drugi sznurek

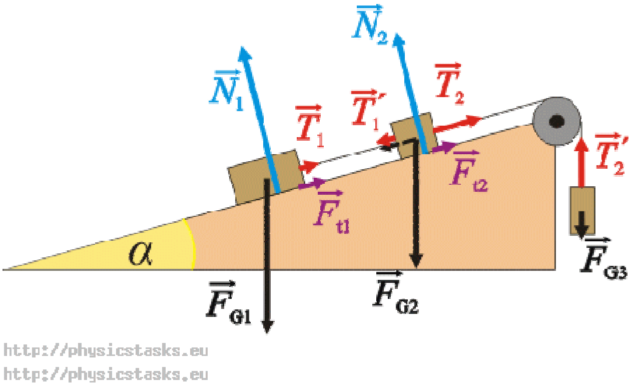
$\overrightarrow{T_1{}'}$ siła napinająca pierwszy sznurek

$\overrightarrow{F_{t2}}$ siła tarcia

Na trzecie ciało o masie m_3 działają siły:

$\overrightarrow{F_{G2}}$ciężar ciała

$\overrightarrow{T_2{}'}$siła napinająca drugi sznurek



Równania ruchu dla poszczególnych mas:

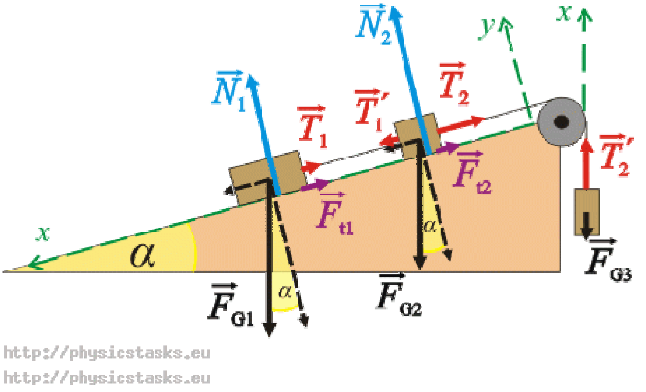
Wszystkie 3 masy są połączone sznurkiem, poruszają się więc z tym samym przyspieszeniem.

$$m_1\!: \overrightarrow{F_{G1}} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{F_{t1}} + \overrightarrow{T_1} = m_1\vec{a}$$

$$m_2\!: \ \overrightarrow{F_{G2}} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{F_{t2}} + \overrightarrow{T_1}' + \overrightarrow{T_2} = m_2\vec{a}$$

$$m_3\!: \ \overrightarrow{F_{G3}} + \overrightarrow{T'_2} = m_3\vec{a}$$

Aby równania ruchu przepisać skalarnie, wprowadźmy układ współrzędnych *x*, *y* tak, by oś *x* wskazywała kierunek ruchu. Oś *y* jest prostopadła do osi *x*.



Siły $\overrightarrow{F_{G1}}$ *i* $\overrightarrow{F_{G2}}$ rozkładamy na 2 składowe:

$$F_{G1_x} = F_{G1} sin\alpha$$

$$F_{G1_y} = F_{G1}\cos\alpha$$

$$F_{G2_x} = F_{G2}\sin\alpha$$

$$F_{G2_y} = F_{G2}\cos\alpha$$

Zapiszmy równania ruchu skalarnie:

$$m_{x1}: F_{G1}sin\alpha - F_{t1} - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

$$m_{x2}: F_{G2}sin\alpha - F_{t2} + T_1' - T_2 = m_2 a \quad (2)$$

$$m_{x3}: - F_{G3} + T_2' = m_3 a \quad (3)$$

$$m_{y1}: N_1 - F_{G1}cos\alpha = 0 \quad (4)$$

$$m_{y2}: N_2 - F_{G2}cos\alpha = 0 \quad (5)$$

W kierunku osi y ruch się nie odbywa, więc dwa ostatnie równania przyrównujemy do zera.

Zaniedbując moment bezwładności krążka, możemy przyrównać do siebie siły działające na końcach sznurków. Masa m_3 działa za pośrednictwem sznurka na masę m_2, a masa m_2 odpowiada działając siłą reakcji na masę m_3. Podobnie oddziałują masy m_1 i m_2. Zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona siły te są jednakowe co do wartości:

$$\left|\overrightarrow{T_1}\right| = \left|\overrightarrow{T_1{}'}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{T_2}\right| = \left|\overrightarrow{T_2{}'}\right|$$

Podpowiedź 2

Zastanów się, od czego zależy wartość sił tarcia i jak je możemy obliczyć.

ROZWIĄZANIE

Siły tarcia:

Siła tarcia zależy od siły nacisku ciała na równię. Tej z kolei, zgodnie z 3. zasadą dynamiki Newtona, odpowiada siła reakcji podłoża. Zapiszmy to za pomocą równań:

$$F_{t1} = fN_1$$

$$F_{t2} = fN_2$$

Siły N_1 i N_2 obliczamy z równań (4) i (5):

$$N_1 = F_{G1}cos\alpha$$

$$N_2 = F_{G2}cos\alpha$$

Na siły tarcia uzyskamy wyrażenia:

$$F_{t1} = fF_{G1}cos\alpha \quad (6)$$

$$F_{t2} = fF_{G2}cos\alpha \quad (7)$$

Podstawiając do równań ruchu (1) i (2):

$$m_{x1}: \ F_{G1}sin\alpha - fF_{G1}cos\alpha - T_1 = m_1 a$$

$$m_{x2}: \ F_{G2}sin\alpha - fF_{G2}cos\alpha + T_1 - T_2 = m_2 a$$

Podstawiamy:

$$F_{G1} = m_1 g, F_{G2} = m_2 g, F_{G3} = m_3 g$$

i przepiszmy równania (6), (7) i (3):

$$m_{x1}: \ m_1 gsin\alpha - fm_1 gcos\alpha - T_1 = m_1 a \quad (8)$$

$$m_{x2}: \ m_2 gsin\alpha - fm_2 gcos\alpha + T_1 - T_2 = m_2 a \quad (9)$$

$$m_{x3}: -m_3 g + T_2 = m_3 a \quad (10)$$

Podpowiedź 3

Uzyskaliśmy 3 równania (8), (9), (10) z trzema niewiadomymi. Po rozwiązaniu układu otrzymamy wartość przyspieszenia i sił napinających nici.

ROZWIĄZANIE

Najpierw wyznaczmy wartość przyspieszenia *a*:

Z równań (8), (9) i (10) otrzymujemy:

$$m_1 g sin\alpha - m_1 g f cos\alpha + m_2 g sin\alpha - m_2 g f cos\alpha - m_3 g = m_2 a + m_3 a + m_1 a$$

$$a = \frac{m_1 g sin\alpha - f m_1 g cos\alpha + m_2 g sin\alpha - m_2 f g cos\alpha - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$a = \frac{g[m_1(sin\alpha - f cos\alpha) + m_2(sin\alpha - f g cos\alpha) - m_3]}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$a = \frac{g[(m_1 + m_2)(sin\alpha - f cos\alpha) - m_3]}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (11)$$

Następnie określamy wartość siły napinającej pierwszą nić T_1:

Podstawmy wartość przyspieszenia z równania (11) do równania (8):

$$m_1 g sin\alpha - f m_1 g cos\alpha - T_1 = m_1 \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - f cos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Wyznaczmy T_1:

$$T_1 = m_1 g sin\alpha - m_1 g f cos\alpha - m_1 \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - f cos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$T_1 = m_1 g(sin\alpha - f cos\alpha) - m_1 \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - f cos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika i porządkujemy:

$$T_1 = \frac{m_1 g(sin\alpha - f cos\alpha)[(m_1 + m_2 + m_3) - (m_1 + m_2)] + m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_3 g(sin\alpha - f cos\alpha) + m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_3 g(1 + sin\alpha - f cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

A teraz określmy wartość siły T_2:

T_2 wyznaczamy z równania (10):

$$T_2 = m_3(a+g)$$

Podstawimy wyrażenie na przyspieszenie (11):

$$T_2 = m_3\left[\frac{(m_1+m_2)g(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3g}{m_1+m_2+m_3} + g\right]$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika i porządkujemy:

$$T_2 = m_3\left[\frac{(m_1+m_2)g(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3g + (m_2+m_1)g + m_3g}{m_1+m_2+m_3}\right]$$

$$T_2 = \frac{m_3g(m_1+m_2)(1+sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1+m_2+m_3}$$

Podsumowanie

Wartość przyspieszenia układu wynosi

$$a = \frac{g(m_1+m_2)(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3g}{m_1+m_2+m_3}$$

Wartość siły napinającej sznurek pomiędzy m_1 i m_2

$$T_1 = \frac{m_1m_3g(1+sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1+m_2+m_3}$$

Wartość siły napinającej sznurek pomiędzy m_2 i m_3

$$T_2 = \frac{m_3g(m_1+m_2)(1+sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1+m_2+m_3}$$

Część III – zadania dla studentów

3.1. Koszykarz

Obręcz kosza na boisku do koszykówki znajduje się na wysokości h_1 nad podłogą. Środek kosza znajduje się w odległości L od linii rzutów wolnych. Koszykarz wykonuje rzuty wolne, piłka opuszcza rękę w miejscu, gdzie jej centrum jest dokładnie nad linią rzutów wolnych na wysokości h_2 nad podłogą.

Określimy kąt optymalny α jako taki kąt, przy którym środek piłki przechodzi przez środek obręczy, a ponadto piłce nadajemy najmniejszą możliwą prędkość początkową. Udowodnij, że wartość tego kąta określona jest wzorem $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, gdzie β to tzw. *kąt obserwacji* , tj. odchylenie od płaszczyzny linii łączącej punkt zaczepienia obręczy z punktem początkowym rzutu.

Wyznacz kąt optymalny dla zadanych wielkości oraz odpowiednią wartość prędkości początkowej piłki.

Zaniedbujemy opór powietrza.

Wykonaj obliczenia dla: $h_1 = 3{,}05$ m, $L = 5{,}425$ m, $h_2 = 2{,}45$ m, $g = 9{,}81$ m·s^{-2} .

Zapis danych

$h_1 = 3{,}05$ m	wysokość obręczy kosza nad podłogą
$L = 5{,}425$ m	pozioma odległość środka kosza od linii rzutów wolnych
$h_2 = 2{,}45$ m	wysokość środka piłki nad podłogą w momencie, gdy środek piłki leży dokładnie nad linią rzutów wolnych
α = ?	kąt optymalny
v_0 = ? (m·s^{-1})	wartość prędkości początkowej piłki odpowiednia dla kąta optymalnego

Z tablic:

$g = 9{,}81$ m·s^{-2} przyspieszenie grawitacyjne

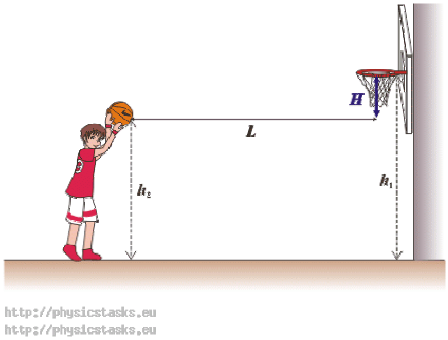
Podpowiedź 1

Naszkicuj pomocniczy rysunek, zaznaczając kąt optymalny i kąt obserwacji, odległość L i wysokość obręczy kosza nad miejscem wyrzucenia piłki.

ROZWIĄZANIE

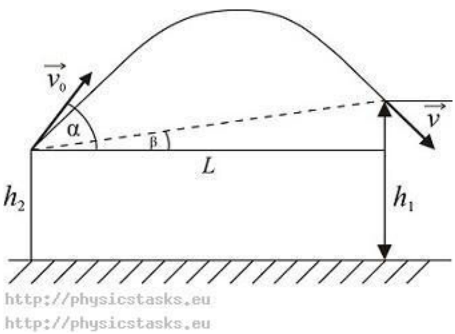
Oznaczmy przez L i H poziomą i pionową odległość środka obręczy od punktu wyrzutu, α kąt optymalny, β kąt obserwacji, t czas lotu, v_0 prędkość początkowa piłki, v prędkość piłki wpadającej do kosza (*patrz rysunek 1,2*).

Rysunek 1:



$H = h_1 - h_2$

Rysunek 2:



<u>*Podpowiedź 2*</u>

Jakim ruchem porusza się piłka w kierunku poziomym? Jakim w kierunku pionowym?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

W kierunku poziomym piłka porusza się ruchem jednostajnym. W kierunku pionowym mamy do czynienia z rzutem pionowym w górę.

<u>*Podpowiedź 3*</u>

Jaka jest pozioma prędkość piłki i jak zmienia się w czasie x-owa składowa jej położenia?

Jaka jest pionowa prędkość piłki i jak zmienia się w czasie y-owa składowa jej położenia?

Jakie wartości będą mieć współrzędne x i y w chwili, gdy piłka doleci do obręczy kosza? Zapisz odpowiednie wzory i wyznacz z nich kwadrat początkowej prędkości v_0^2*(skorzystaj też ze związku* $tg\ \beta = H/L$*).*

ROZWIĄZANIE

Zapiszmy równania:

$$v_x = v_0 cos\alpha$$
$$v_y = v_0 sin\alpha - gt$$
$$x = v_0 t cos\alpha$$
$$y = v_0 t sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

W chwili, gdy piłka doleci do obręczy kosza, będziemy mieli:

$x = L = v_0 t cos\alpha$, stąd $t = \frac{L}{v_0 cos\alpha}$

$$y = H = v_0 t sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = Ltg\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}$$

Po przekształceniach:

$$\frac{gL^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} = Ltg\alpha - H$$
$$\frac{gL^2}{Ltg\alpha - H} = 2v_0^2 cos^2\alpha$$
$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(Ltg\alpha - H)cos^2\alpha}$$

Po podstawieniu $H = L\ tg\ \beta$ i przekształceniach otrzymamy:

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(Lsin\alpha cos\alpha - Ltg\beta cos^2\alpha)} = \frac{gL}{sin2\alpha - tg\beta(1 + cos2\alpha)}$$
$$v_0^2 = \frac{gLcos\beta}{sin2\alpha cos\beta - sin\beta - sin\beta cos2\alpha)}$$

Uwaga: W przekształceniach skorzystaliśmy ze wzorów trygonometrycznych:

$$2sin\alpha cos\alpha = sin2\alpha$$
$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha - \beta) = sin2\alpha cos\beta - cos2\alpha sin\beta$$

Podpowiedź 4

Dla jakiego kąta α wartość wyrażenia v_0^2 będzie minimalna?

ROZWIĄZANIE

Wartość wyrażenia będzie minimalna przy maksymalnej wartości mianownika, czyli dla:

$$\sin(2\alpha - \beta) = 1$$
$$2\alpha - \beta = 90^o$$

a stąd wynika: $\alpha = 45^o + \frac{\beta}{2}$.

Podpowiedź 5

Określ prędkość początkową v_0 dla kąta optymalnego α, a więc w przypadku, gdy sin(2α−β) = 1. Sinus i cosinus kąta β można wyrazić poprzez odległości H i L.

ROZWIĄZANIE

W tym przypadku:

$$v_0^2 = \frac{gLcos\beta}{1 - sin\beta}$$

Będziemy mieli:

$$cos\beta = \frac{L}{\sqrt{H^2 + L^2}}; \ sin\beta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}}$$

podstawiając $H = h_1 - h_2$:

$$cos\beta = \frac{L}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}; \ sin\beta = \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$$

Wobec tego:

$$v_0^2 = \frac{\frac{gL^2}{\sqrt{H^2 + L^2}}}{1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}}} = \frac{gL^2}{\sqrt{H^2 + L^2} - H} = g(\sqrt{H^2 + L^2} + H)$$

po podstawieniu $H = h_1 - h_2$:

$$v_0^2 = g(\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2} + (h_1 - h_2)$$

Dla zadanych wartości liczbowych:

$$sin\beta = \frac{3{,}05 - 2{,}45}{\sqrt{(3{,}05 - 2{,}45)^2 + 5{,}425^2}}$$

Stąd wynika: $\beta = 6^{\circ}$. Mamy więc:

$$\alpha = 45^o + \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = 48^o$$

I dalej:

$$v_0^2 = 9{,}81(\sqrt{(3{,}05 - 2{,}45)^2 + 5{,}425^2} + (3{,}05 - 2{,}45)m^2s^{-2}$$

$$v_0 \ = 7{,}7ms^{-1}$$

Odpowiedź

Kąt optymalny dla rzutu wynosi: $\alpha = 45^o + \frac{\beta}{2}$, gdzie $sin\beta = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2}}$

Dla zadanych wartości: $\alpha = 48^o$

Wartość prędkości początkowej piłki wynosi: $v_0^2 = g(\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2} + (h_1 - h_2)$

Dla zadanych wartości: $v_0 = 7{,}7ms^{-1}$

3.2. Wąż ogrodowy

Strumieniem wody tryskającym z węża ogrodowego z prędkością początkową 15 m·s^{-1} chcemy dosięgnąć jak najwyżej, kierując go na pionową ścianę odległą o 10 m od dyszy.

a) Jaki powinniśmy wybrać kąt początkowy?

b) Do jakiej wysokości na ścianie dotrze woda?

c) Pod jakim kątem woda uderzy w ścianę? Określ odchylenie od poziomu wektora prędkości chwilowej wody w momencie trafienia w ścianę.

Opór powietrza zaniedbujemy.

Zapis danych

v_0 = 15 m·s^{-1}	prędkość początkowa strumienia wody
d = 10 m	odległość ściany
α = ? (°)	kąt początkowy
h = ? (m)	maksymalna wysokość, do której sięgnie woda
ψ = ? (°)	kąt, pod którym woda trafia w ścianę

Z tablic:

g = 9,81 m·s^{-2} przyspieszenie grawitacyjne

Analiza

Chcemy ustalić, pod jakim kątem α musimy skierować wąż, aby woda dotarła jak najwyżej; powinniśmy najpierw ustalić, jak ta wysokość h zależy od kąta α. Inaczej mówiąc, szukamy maksimum funkcji $h(\alpha)$.

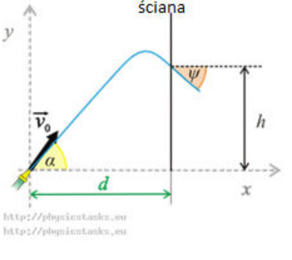
Zwróćmy uwagę, że maksymalna wysokość na ścianie wcale nie musi odpowiadać maksymalnej wysokości rzutu dla danego kąta α. Trzeba sobie uświadomić, że to odległość ściany jest ustalona. Pomyśl o różnych możliwych sytuacjach.

Podpowiedź 1 do a)

Naszkicuj pomocniczy rysunek. O jaki rodzaj ruchu chodzi? Jak będzie się zmieniać z czasem x-owa i y-owa współrzędna prędkości wody? Jak się będzie zmieniać x-owa i y-owa współrzędna położenia?

ROZWIĄZANIE:

Rysunek 1:



Początek układu współrzędnych umieścimy w dyszy węża.

Mamy do czynienia z rzutem ukośnym.

X-owa i *y*-owa składowa prędkości wody oraz *x*-owa i *y*-owa współrzędna położenia zmieniają się w czasie według wzorów:

$$v_x = v_0 cos\alpha \qquad (1)$$

$$v_y = v_0 sin\alpha - gt \qquad (2)$$

$$x = v_0 t cos\alpha \qquad (3)$$

$$y = v_0 t sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

<u>Podpowiedź 2 do a)</u>

Jak długo trwać będzie lot wody do ściany dla danego kąta α? Jaka wysokość h w miejscu uderzenia strumienia wody w ścianę odpowiada temu czasowi?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Zapiszmy wzory na czas lotu wody i wysokość miejsca uderzenia w ścianę.

$x = d$

Podstawmy z (3): $d = v_o t cos\alpha$

$$t = \frac{d}{v_o cos\alpha} \qquad (5)$$

$y = h$

Podstawmy z (4): $h = v_0 t sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$

Podstawmy jeszcze za *t* z (5):

$$h = d tg\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} = d tg\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha) \qquad (6)$$

<u>Podpowiedź 3 do a)</u>

Chcielibyśmy wiedzieć, dla jakiego kąta α wysokość h miejsca uderzenia strumienia wody na ścianie będzie maksymalna. Szukamy więc maksimum funkcji h = h(α). Jaki jest na to matematyczny sposób?

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Sprawdzimy, dla jakiego kąta pochodna funkcji *h* względem *α* wynosi zero:

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(d tg\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}\right)$$

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{d}{dcos^2\alpha} - \frac{gd^2 sin\alpha}{v_0^2 cos^3\alpha} = \frac{d}{dcos^2\alpha}\left(1 - \frac{gd}{v_0^2} tg\alpha\right) = 0$$

$$1 - \frac{gd}{v_0^2} tg\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_o^2}{gd} \qquad (7)$$

Dla kąta początkowego $\alpha = arctg\frac{v_0^2}{gd}$ funkcja *h(α)* osiągnie maksimum.

Dla zadanych wartości: tg $\alpha = \frac{15^2}{9{,}81\cdot 10} = 2{,}294$. Zatem α = arc tg 2,294 = 66,4°

Podpowiedź 4 do b)

Znamy już kąt odpowiadający maksymalnej wysokości wody na ścianie i zależność tej wysokości h od kąta α. Maksymalną wysokość możemy już łatwo obliczyć.

ROZWIĄZANIE

Wiemy już, że wysokość miejsca uderzenia strumienia wody w ścianę określimy wg wzoru (6):

$$h = d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} = d\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha)$$

Wiemy też, że wysokość *h* miejsca uderzenia w ścianę będzie maksymalna dla kąta *α*, określonego wzorem (7):

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0^2}{gd}$$

Po podstawieniu wzoru (7) do wzoru (6) otrzymujemy:

$$h = \frac{dv_0^2}{gd} - \frac{gd^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_o^4}{g^2d^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

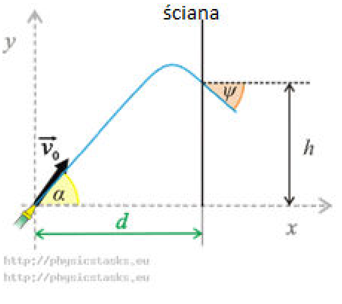
$$h = (\frac{15^2}{2\cdot 9{,}81} - \frac{9{,}81\cdot 10^2}{2\cdot 15^2})m$$

$$h = 9{,}29m$$

Podpowiedź 5 do c)

Przedstaw na rysunku wektor prędkości wody w chwili uderzenia w ścianę i jego składowe w kierunku osi x i y. Za ich pomocą można łatwo określić szukany kąt. Wartości obu składowych prędkości w chwili uderzenia w ścianę oblicz na podstawie równań (1) i (2).

ROZWIĄZANIE



Kąt odchylenia ψ prędkości uderzenia od poziomu określimy ze wzoru:

$$tg\Psi = \frac{v_y}{v_x}$$

Za v_x i v_y podstawimy wyrażenia z równań (1) i (2), a za czas t ze wzoru (5):

$$tg\Psi = \frac{v_0 sin\alpha - gt}{v_0 cos\alpha} = tg\alpha - \frac{gd}{v_0^2 cos^2\alpha}$$

Przekształcimy korzystając z (7):

$$tg\Psi = tg\alpha - \frac{1}{tg\alpha cos^2\alpha}$$

$$tg\Psi = tg\alpha - \frac{1}{sin\alpha cos\alpha} = \frac{sin^2\alpha - 1}{sin\alpha cos\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{gd}{v_0^2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

tg $\psi = -\frac{9.81 \cdot 10}{15^2} = -0.436$, a stąd $\psi = -23{,}6^o$.

Kąt odchylenia ψ prędkości uderzenia od poziomu ma wartość ujemną. Patrz *rysunek*.

Uwaga:

Przy maksymalnej wysokości na torze lotu wody składowa y-owa prędkości wynosi zero, a wówczas i kąt φ jest zerowy.

Odpowiedź

a) Aby strumień wody sięgnął jak najwyżej na pionową ścianę, musimy skierować strumień pod kątem początkowym α:

$$\alpha = arctg\frac{v_o^2}{gd} = 66{,}4^o$$

b) Strumień wody sięgnie do wysokości h:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gd^2}{2v_0^2} = 9{,}29m$$

c) Woda uderzy w ścianę pod kątem ψ , dla którego:

$$tg\Psi = -\frac{gd}{v_0^2}$$

Dla zadanych wartości liczbowych: $\Psi = -23{,}6^o$.

3.3. Pocisk i klocek

Na poziomym torze znajduje się spoczywający klocek. Nagle nadlatuje pocisk poruszający się poziomo i uderza w klocek. W wyniku zderzenia pocisk ugrzązł wewnątrz klocka i klocek z pociskiem przesunął się po powierzchni poziomej na odległość s = 2 m. Masa klocka M była 499 razy większa od masy pocisku, a współczynnik tarcia kinetycznego klocka wynosi μ_k = 0,06. Jaką prędkość v przez zderzeniem miał pocisk?

<u>Podpowiedź 1:</u> Wypisz dane, które znamy z zadania.

<u>ROZWIĄZANIE:</u>

$s = 2$ m	- droga, którą pokonał klocka z pociskiem,
$M = 499\ m_p$	- masa kocka jest 499 razy większa od masy pocisku,
$\mu_k = 0{,}06$	- współczynnik tarcia kinetycznego klocka,
$g = 9{,}81$ m/s^2	- przyspieszenie ziemskie,
$v = ?$	- szukana prędkość pocisku przed zderzeniem z klockiem,

<u>Podpowiedź 2:</u> Podczas zderzenia niesprężystego odkształca się klocek, ponieważ grzęźnie w nim pocisk. W tej sytuacji możemy stosować tylko zasadę zachowania pędu. Napisz odpowiednie równanie. Po lewej stronie równania zapisujemy całkowity pęd przed zderzeniem, natomiast po prawej stronie całkowity pęd po zderzeniu.

<u>ROZWIĄZANIE:</u>

Korzystamy z zasady zachowania pędu. Przed zderzeniem pęd posiadał tylko pocisk, natomiast po zderzeniu klocek poruszał się razem z pociskiem z prędkością v_o.

$$\vec{p}_{p1} + \vec{p}_{k1} = \vec{p}_{p2} + \vec{p}_{k2}$$

Napiszemy równanie skalarne:

$$m_p v + 0 = (M + m_p) v_o \qquad (1)$$

v_o – prędkość po zderzeniu ugrzęźniętego pocisku i klocka.

<u>Podpowiedź 3:</u> Zastanów się jakim rodzajem ruchu będzie poruszał się klocek po poziomym torze od chwili zderzenia do momentu zatrzymania się.

<u>ROZWIĄZANIE:</u>

Klocek będzie poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym, ponieważ między dolną powierzchnią klocka i powierzchnią poziomego toru działa siła tarcia.

Prędkość v_o uzyskana przez klocek i ugrzęźnięty w nim pocisk jest prędkością początkową w ruchu jednostajnie opóźnionym klocka z pociskiem.

$$m_p v = (499 m_p + m_p) v_o \qquad (2)$$

$$m_p v = 500 m_p v_o \qquad (3)$$

$$v = 500 v_o \qquad (4)$$

Obliczymy teraz prędkość v_o .

Zapisujemy równania dla ruchu jednostajnie opóźnionego klocka z pociskiem:

a) równanie opisujące drogę

$$s = v_o t - \frac{at^2}{2} \qquad (5)$$

b) równanie dla prędkości

$$v_k = v_o - at \tag{6}$$

$$0 = v_o - at \tag{7}$$

$v_k = 0$ ponieważ klocek z pociskiem zatrzymują się na poziomym torze.

$$t = \frac{v_o}{a} \tag{8}$$

Siłę tarcia T pomiędzy klockiem z ugrzęźniętym pociskiem a poziomą powierzchnią możemy zapisać:

$$T = \mu_k (M + m_p) g \tag{9}$$

$$F = T \tag{10}$$

$$(M + m_p) a = \mu_k (M + m_p) g \tag{11}$$

$$a = \mu_k g \tag{12}$$

Korzystając z równań (8) i (12) możemy równanie (5) zapisać w następującej postaci:

$$s = v_o \frac{v_o}{a} - \frac{a \frac{v_o^2}{a^2}}{2} = \frac{v_o^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{a} \tag{13}$$

$$s = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{\mu_k g} \tag{14}$$

Po przekształceniu równania (14) otrzymujemy wzór na v_o .

$$v_o^2 = 2s\mu_k g$$

$$v_o = \sqrt{2s\mu_k g} \tag{15}$$

Do równania (4) wstawiamy równanie (15) i otrzymujemy wzór końcowy na szukaną prędkość v:

$$v = 500\sqrt{2s\mu_k g} \tag{16}$$

Wykonujemy obliczenia:

$$v = 500\sqrt{2 * 2m * 0,06 * 9,81\frac{m}{s^2}} = 767,2\frac{m}{s}$$

<u>Odpowiedź</u>

Pocisk przed zderzeniem z klockiem posiadał prędkość:

$$v = 500\sqrt{2s\mu_k g} = 767,2 m/s$$

[Opracowanie AK]

3.4. Ruch po okręgu

Ruch punktu materialnego opisany jest w układzie kartezjańskim równaniami:

$x = A \cos(\omega t)$, $y = A \sin(\omega t)$, gdzie A = const, ω = const, t jest parametrem;

a) Wykazać, że tor punktu jest okręgiem o promieniu A,

b) Wyznaczyć składowe prędkości i przyspieszenia w zależności od x i y,

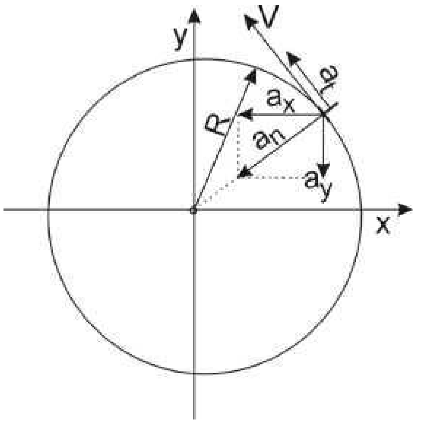
c) Wyznaczyć wartości bezwzględne wektora prędkości i przyspieszenia.

<u>PODPOWIEDŹ</u>

R jest promieniem wodzącym punktu;

a_n - przyspieszenie normalne, a_t - przyspieszenie styczne.

$v = \omega R$ = const; $a_t = 0$; $a = a_n$



<u>ROZWIĄZANIE</u>

a) Należy doprowadzić do równania okręgu: $x^2 + y^2 = R^2$

$$x^2 + y^2 = A^2 \cos^2(\omega t) + A^2 \sin^2(\omega t) = A^2, \qquad R = A$$

b) $dx/dt = -A\omega \sin(\omega t) = -\omega y$

$$dy/dt = A\omega \cos(\omega t) = \omega x$$

$$\mathbf{v} = [dx/dt, dy/dt] = [-\omega y, \omega x]$$

$$d^2x/dt^2 = -A\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x = -a_x$$

$$d^2y/dt^2 = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y = -a_y$$

$$\mathbf{a} = [d^2x/dt^2, d^2y/dt^2] = [-\omega^2 x, -\omega^2 y] = -\omega^2 [x, y] = -\omega^2 R, \qquad \text{bo } R = [x, y]$$

c) $v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = A^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + A^2\omega^2 \sin^2(\omega t), \qquad v = A\omega$,

$$a^2 = (d^2x/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2 = A^2\omega^4 \sin^2(\omega t) + A^2\omega^4 \cos^2(\omega t), \qquad a = A\omega^2$$

[Opracowanie KR]

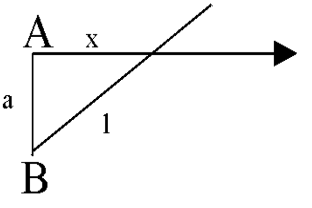
3.5. Obracający się pręt

Pręt o długości l obraca się wokół punktu zamocowania B ze stałą prędkością kątową ω. Punkt B odległy jest o odcinek a od prostej x, przy czym a < l. Zakładając, że w chwili t = 0 punkt przecięcia pręta z prostą pokrywa się z punktem A, wyznaczyć położenie oraz prędkość i przyspieszenie punktu przecięcia pręta i prostej w funkcji położenia.

PODPOWIEDŹ

Wykonaj pomocniczy rusunek. Wyraź kąt zakreślany przez pręt poprzez x i a.

ROZWIĄZANIE



$$x = a\,\mathrm{tg}\,(\omega t)$$

W celu określenia prędkości dokonujemy różniczkowania:

$$dx/dt = a\omega/\cos^2(\omega t) = a\omega \mathrm{tg}^2(\omega t) + a\omega = a\omega + \omega x^2/a, \qquad \text{bo } 1/\cos^2\omega t = \mathrm{tg}^2\omega t + 1,$$

mamy zatem

$$v = dx/dt = \omega x^2/a + a\omega \;;$$

Przyspieszenie to druga pochodna położenia:

$$a = d^2x/dt^2 = [d(dx/dt]/dt = (\,2\omega x dx/dt\,) = (\,2\omega x/a\,)(\,a\omega + \omega x^2/a) = 2x\omega^2\,(1 + x^2/a^2\,).$$

ODPOWIEDŹ

Położenie wyrażamy wzorem:

$$x = a\,\mathrm{tg}\,(\omega t)$$

Prędkość określimy jako:

$$v = \omega x^2/a + a\omega$$

Przyspieszenie wyrazimy wzorem:

$$a = 2x\omega^2\,(1 + x^2/a^2\,).$$

[Opracowanie KR]

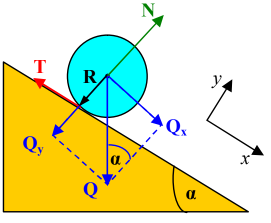
3.6. Wyścig walca i kuli

Walec i kula o masach M i promieniach R staczają się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia α względem poziomu. Która z brył dotrze do podstawy równi w krótszym czasie zakładając, że obie startują z wierzchołka równi w tym samym momencie z zerową prędkością początkową?

<u>Dane:</u>
R – promień walca i kuli
M – masa walca i kuli

α – kąt nachylenia równi względem poziomu

<u>Podpowiedź 1:</u> *Dla wybranej bryły zrób rysunek według danych z treści zadania i rozrysuj siły działające na nią.*



Siłę ciężkości **Q** rozkładamy na dwie składowe, prostopadłą do powierzchni równi o wartości $Q_y = Q\cos(\alpha)$ oraz równoległą do powierzchni równi o wartości $Q_x = Q\sin(\alpha)$. Ponadto na bryłę działa siła tarcia **T** zwrócona przeciwnie do kierunku ruchu oraz siła reakcji podłoża **N**.

<u>Podpowiedź 2:</u> *Toczenie się bryły rozpatrujemy jako złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy. Do obu rodzajów ruchu stosujemy **II zasadę dynamiki Newtona,** na podstawie której znajdujemy przyspieszenie liniowe.*

<u>Rozwiązanie</u>

A. Druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego środka masy:

$$M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}.$$

gdzie $\boldsymbol{a}$ to przyspieszenie liniowe środka masy.

Po zrzutowaniu wektorów na kierunki x i y otrzymujemy:

$$\begin{cases} Ma = Q_x - T, \\ 0 = N - Q_y, \end{cases} \qquad (*)$$

gdzie $Q_x = Q\sin(\alpha)$ oraz $Q_y = Q\cos(\alpha)$.

Ponieważ nie ma poślizgu, to występujące tarcie jest tarciem statycznym:

$$T = \mu N = \mu Q\cos(\alpha) = \mu Mg\cos(\alpha)$$

gdzie μ to współczynnik tarcia statycznego.

B. Ruch obrotowy względem osi symetrii jest wynikiem działania tylko momentu siły tarcia. Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy:

$$I\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{T},$$

gdzie I to moment bezwładności bryły oraz $\boldsymbol{\varepsilon}$ to przyspieszenie kątowe.

Ruch obrotowy względem osi symetrii jest wynikiem działania tylko momentu siły tarcia, gdyż momenty sił $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{N}$ wynoszą 0. W zapisie skalarnym mamy:

$$I\varepsilon = RT\sin\left(90°\right) = RT. \qquad (**)$$

Przy braku poślizgu obowiązuje następująca zależność pomiędzy przyspieszenie kątowym i liniowym:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}. \qquad (***)$$

Z układu równań (*), (**) oraz (***) wyznaczamy przyspieszenie liniowe układu:

$$a = \frac{g\sin\left(\alpha\right)}{1 + \frac{I}{MR^2}}.$$

Momenty bezwładności dla walca i kuli wynoszą odpowiednio:

$$\begin{cases} I_{walec} = \frac{1}{2}MR^2 \\ I_{kula} = \frac{2}{5}MR^2 \end{cases}$$

Po wstawieniu momentów bezwładności do wyznaczonego wzoru na przyspieszenie liniowe, otrzymamy, że kula osiągnie większe przyspieszenie:

$$a_{\text{walec}} = \frac{2}{3}g\sin\left(\alpha\right) < a_{\text{kula}} = \frac{5}{7}g\sin\left(\alpha\right)$$

Odpowiedź

Podstawę równi pierwsza osiągnie kula.

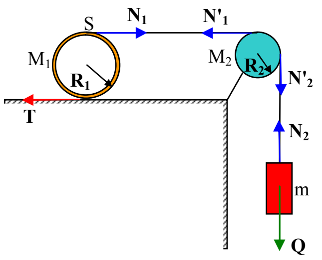
[Opracowanie KF]

3.7. Rurka, bloczek i cegła

Na wydrążony walec (cienkościenna rurka) o masie M_1 i promieniu R_1 nawinięto nieważką i nierozciągliwą nić, którą przerzucono przez walcowaty bloczek o masie M_2 i promieniu R_2. Na końcu nici zawieszono cegłę o masie m. Wyznacz przyspieszenie cegły i siłę tarcia działającą na wydrążony walec zakładając, że toczy się on bez poślizgu.

Dane:
M_1 – masa wydrążonego walca
R_1 – promień wydrążonego walca
M_2 – masa bloczka
R_2 – promień bloczka
m – masa cegły

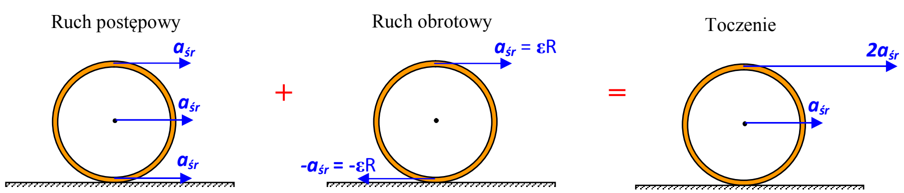
Podpowiedź 1: *Zrób rysunek według danych z treści zadania i rozrysuj siły działające na każde ciało w układzie.*



Na rurkę działa siła tarcia **T** oraz siła reakcji nici $\mathbf{N_1}$. Na bloczek działają siły reakcji nici $\mathbf{N'_1}$ oraz $\mathbf{N'_2}$, natomiast na cegłę działa siła ciężkości **Q** oraz siła reakcji $\mathbf{N_2}$. Nieważkość nici pozwala napisać: $N_1 = N'_1$ oraz $N_2 = N'_2$.

Podpowiedź 2:

Nierozciągliwość nici sprawia, że przyspieszenie liniowe cegły, bloczka i punktu S na rurce jest takie same co do wartości (a). Ponieważ ruch rurki jest kombinacją ruchu postępowego i obrotowego, przyspieszenie w punkcie S jest dwukrotnie większe od przyspieszenia środka masy $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}_{śr}$.



Podpowiedź 3: *Ruch każdego ciała, rurki, bloczka oraz cegły, staramy się rozpatrywać jako złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy. Do obu rodzajów ruchu stosujemy **II zasadę dynamiki Newtona** i dokonujemy szczegółowej analizy równań.*

Rozwiązanie

A. II zasada dynamiki Newtona dla rurki:

- ruch postępowy: $M_1 \boldsymbol{a}_{sr} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}$,

- ruch obrotowy: $I_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{T} + \boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{N}_1$,

gdzie $I_1 = M_1 R_1^2$ to moment bezwładności rurki względem osi symetrii rurki oraz $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ to jej przyspieszenie kątowe. Jeżeli przyjąć, że wektory $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{T}_1$ oraz $\boldsymbol{N}_1$ leżą w płaszczyźnie kartki, to momenty sił, $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{T}$ oraz $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{N}_1$, odpowiedzialne za obrót są prostopadłe do kartki. Wtedy wektory $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{T}$ oraz $\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{N}_1$ zwrócone są "od nas" i ten kierunek przyjmujemy za dodatni. Równania wektorowe przyjmują wówczas następującą postać w postaci skalarnej:

$$\begin{cases} M_1 a_{sr} = N_1 - T \\ I_1 \varepsilon_1 = R_1 T \sin(90°) + R_1 N_1 \sin(90°) = R_1 (T + N_1). \end{cases}$$

Wykorzystując fakt, że dla ruchu bez poślizgu $\varepsilon = a_{sr} / R_1 = a/(2R_1)$, powyższe równania przyjmują postać:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} M_1 a = N_1 - T \\ \frac{1}{2} M_1 a = N_1 + T \end{cases}$$

Co prowadzi do rezultatu $T = 0$ oraz $N_1 = M_1 a/2$. Brak siły tarcia oznacza tutaj, że walec wydrążony może toczyć się bez poślizgu nawet po idealnie gładkim stole.

B. Bloczek obraca się wokół nieruchomej osi przechodzącej przez jego środek. Obrót bloku następuje pod wpływem sił napięcia nici:

- ruch obrotowy: $I_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{N}_1' + \boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{N}_2'$,

gdzie $I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2$ to moment bezwładności bloczka względem jego osi symetrii oraz $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ to jego przyspieszenie kątowe. Jeżeli przyjąć, że wektory $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{N}_1'$ oraz $\boldsymbol{N}_2'$ leżą w płaszczyźnie kartki, to momenty sił są prostopadłe do kartki. Wtedy wektory $\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{N}_1'$ zwrócony jest "do nas" a wektor $\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{N}_2'$ zwrócony jest "od nas". Wykorzystując fakt, że $N_1 = N'_1$, $N_2 = N'_2$ równanie wektorowe przyjmuje następującą postać w postaci skalarnej:

$$I_2 \varepsilon_2 = R_2 N_2 \sin(90°) - R_2 N_1 \sin(90°) = R_2 (N_2 - N_1)$$

Używając definicji I_2 i $\varepsilon_2 = a/R_2$ oraz korzystając z wyniku uzyskanego w punkcie A, $N_1 = \frac{1}{2} M_1 a$, otrzymamy:

$$N_2 = \frac{1}{2} a (M_1 + M_2)$$

C. Cegła porusza się tylko ruchem postępowym. II zasada dynamiki Newtona w postaci wektorowej ma postać:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{N}_2.$$

Wykorzystując fakt, że $Q = mg$ oraz $N_2 = 1/2\, a (M_1 + M_2)$, równanie skalarne można napisać w postaci:

$$ma = mg - 1/2\, a (M_1 + M_2)$$

Z ostatniego równania otrzymujemy przyspieszenie cegły:

$$a = \frac{2m}{(2m + M_1 + M_2)} g$$

<u>Odpowiedź</u>

Siła tarcia działającą na wydrążony walec $T = 0$, przyspieszenie cegły $a = 2mg/(2m + M_1 + M_2)$.

[Opracowanie KF]

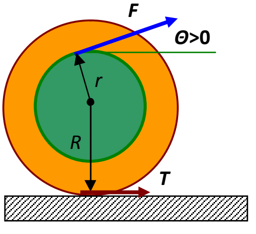
3.8. Szpula Pana Hieronima

Pan Hieronim pokazuje taką „sztuczkę”: na szpulę o wewnętrznym promieniu r i promieniu zewnętrznym R jest nawinięty giętki pas. Pan Hieronim, odpowiednio unosząc albo opuszczając ten pas, „pociąga” szpulkę do siebie albo od siebie. Jaki jest graniczny kąt θ_o, od którego szpulka zaczyna się poruszać w jednym albo drugim kierunku? Ile wynosi przyspieszenie dla kąta $\theta_o+10°$ i $\theta_o-10°$. Czy szpulka toczy się czy ślizga dla tych kątów?

Przeprowadź obliczenia, przyjmując masę szpulki 2 kg, siłę ciągnącą szpulkę F=8N, promień r = 5 cm, R = 10 cm i współczynnik tarcia μ_s=0,4. Zakładamy dla celów obliczenia momentu bezwładności, że szpulka jest jednorodnym walcem o promieniu R.

Dane:
R = 10 cm – promień zewnętrzny szpulki
r = 5 cm – promień, na jakim działa siła $\boldsymbol{F}$
μ_s = 0,4 współczynnik tarcia (statycznego)
m = 2 kg masa szpulki
F = 10N
a – przyspieszenie środka masy szpulki

Wskazówka Zadanie przypomina poprzedni problem a różni się tylko kątem θ nachylenia siły F w stosunku do poziomu.



Równania ruchu

Równania ruchu to dwa równania II zasady dynamiki Newtona: ruchu translacyjnego środka masy i ruchu obrotowego wokół tego środka masy. Dla ruchu translacyjnego (tj. w kierunku poziomym) mamy

$$F\cos\theta + T = ma \tag{1}$$

Zgodnie z rysunkiem zakładamy przyspieszenie i siły za dodatnie, jeśli działają w prawo. Promień r uważamy za dodatni, jeśli punkt przyłożenia siły leży nad środkiem obrotu szpulki (jak na rysunku). Kąt θ między kierunkiem poziomym a siłą zmienia się w zakresie od
$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Dla ruchu obrotowego szpulki mamy

$$Fr - TR = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}mRa \tag{2}$$

Zauważ, że w równaniu (1) siły F i T się dodają, bo działają w tym samym kierunku, natomiast ich momenty sił, Fr i TR odejmują się, jako że powodują obrót szpulki w przeciwnych kierunkach.

Zadanie rozwiązujemy analogicznie jak sposób II w poprzednim przykładzie. Rozwiązaniem układu równań (1)-(2) jest

$$a = \frac{2F}{3m}\frac{R\cos\theta + r}{R} \tag{3}$$

i

$$T = \frac{F}{3R}(2r - R\cos\theta) \tag{4}.$$

Kierunek toczenia się

W odróżnieniu od poprzedniego zadania, przyspieszenie środka masy może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Decyduje o tym znak sumy ($r + R\cos\theta$). Dla ujemnego r (czyli taśmy zaczepionej w dolnej części szpulki i kąta θ takiego, że $\cos\theta < \frac{|r|}{R}$, czyli $|\theta| > \arccos\frac{|r|}{R}$ przyspieszenie staje się ujemne: szpulka ze stanu spoczynku zaczyna toczyć się w lewo. Przy mniejszym kącie nachylenia taśmy, przyspieszenie jest skierowane w prawo. Przypominamy, z poprzedniego zadania, że przy kącie $\theta=0$ (i $|r|<R$) szpulka toczy się zawsze w prawo.

Maksymalna siła F

Istotny jest warunek toczenia się szpulki (tzn. braku poślizgu). Siła nacisku szpulki na podłoże N wyraża się wzorem

$$N = mg - F\sin\theta \tag{5}$$

Dla zapewnienia się toczenia, siła tarcia T nie może przekroczyć maksymalnej wartości

$$|T| \le T_{\max} = \mu_s(mg - F\sin\theta) \tag{6}$$

Zgodnie z równaniem (4) nakłada to ograniczenie na maksymalną siłę F.

Obliczenia numeryczne

Dla taśmy zaczepionej od dołu szpulki i przy podanych promieniach warunek $r + R\cos\theta = 0$ otrzymuje się dla $\theta_o=60°$.

Dla kąta $\theta=70°$ otrzymujemy ze wzoru (3) $a = –0{,}42$ m/s^2 (szpulka przyspiesza w lewo)

a dla kąta $\theta=50°$ otrzymujemy $a = +0{,}38$ m/s^2 (szpulka przyspiesza w prawo).

Siła tarcia (wzór 4) wynosi odpowiednio $T = -3{,}58$N dla $\theta=70°$ i $T = -4{,}38$N dla $\theta=50°$.

Graniczne wartości siły tarcia (wzór 6) wynoszą $T_{\max}=4{,}84$N dla $\theta=70°$ i $T = 5{,}40$N dla $\theta=50°$. W żadnym przypadku działająca siła tarcia nie przekracza maksymalnej siły tarcia statycznego.

Sprawdź, że szpulka, przy podanych kątach, będzie się ślizgała już dla siły 9,5 N.

Zadanie numeryczne Znajdź, poprzez iterację numeryczną, do jakiego kąta należy zmniejszyć pochylenie siły 9,5 N aby szpulka się nie ślizgała.

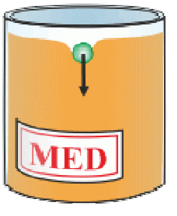
[Opracowanie GK, zob. też P. Mazzoldi, A. Saggion, C.Voci, Problemi di fisica generale, Padova, zad. 6.55]

Część IV – zadania dla doktorantów

4.1. Kulka w miodzie

Kulkę stalową o masie m umieszczono w słoiku z miodem. Siła oporu F_{odp} działająca na kulkę jest wprost proporcjonalna do prędkości obrotowej.

1) Określ, jaką maksymalną prędkość v_{max} kulka może osiągnąć.
2) Określ, jak zmienia się prędkość kulki w funkcji czasu v(t).



Wypisujemy dane:

m	masa kulki
V	objętość kulki
ρ_m	gęstość miodu
$\overrightarrow{F_{odp}}$	siła oporu działająca na kulkę
k	stała wyporności
$v(t)$	prędkość w chwili *t*
v_{max}	maksymalna prędkość, jaką może kulka osiągnąć

Z tablic

$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ przyspieszenie grawitacyjne

Podpowiedź 1

Zastanów się najpierw, jakie siły działają na piłkę, jak zmienia się ich wartość podczas ruchu. Jak zmienia się wypadkowa tych sił? Jak będzie zmieniać się prędkość i przyspieszenie piłki w czasie? Sporządź pomocniczy rysunek.

ROZWIĄZANIE

Są trzy siły działające na kulkę:

$\overrightarrow{F_{odp}}$ siła oporu

$\overrightarrow{F_G}$ siła grawitacji

$\overrightarrow{F_{vz}}$ siła wyporu

Zależność między występującymi siłami:

$$\overrightarrow{F_{odp}} = kv \text{ wzrasta wraz z prędkością}$$

$$\overrightarrow{F_G} = mg \text{ jest stała}$$

$$\overrightarrow{F_{vz}} = V\rho_m g \text{ pozostaje stała}$$

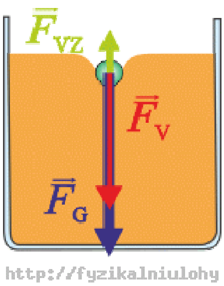
k	stała wyporności
V	objętość kulki
ρ_m	gęstość miodu

z tablic:

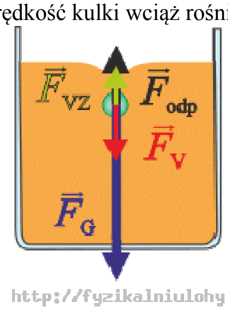
$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ przyspieszenie grawitacyjne

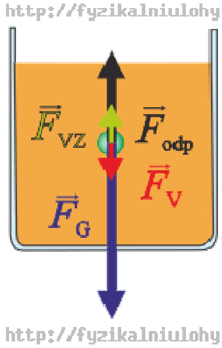
Jak się zmienia wielkość siły wypadkowej, przyspieszenia i prędkości podczas ruchu kulki:

1.Początkowo prędkość ruchu kulki i siła oporu są zerowe. Biorąc pod uwagę, że gęstość stali jest większa niż gęstość miodu, powstała siła jest skierowana w dół, tak jak przyspieszenie, gdy wzrasta prędkość kulki.

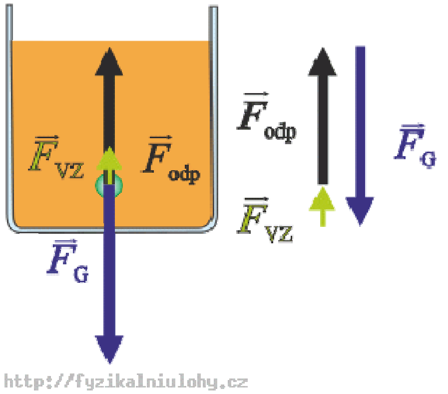


2. Ponieważ coraz szybciej wzrasta siła oporu, wielkość siły wypadkowej w dół maleje, maleje również przyspieszenie. Prędkość kulki wciąż rośnie, ale coraz wolniej.





3. Gdy siła tarcia i siła wyporu zrównoważą działanie siły ciężkości wypadkowa siła równa jest zero. Wówczas przyspieszenie kulki również jest równe zero i kulka porusza się ze stałą prędkością.



<u>*Podpowiedź 1*</u>

Jaka jest wypadkowa siła, gdy kulka osiągnie maksymalną prędkość? Napisz równanie ruchu.

ROZWIĄZANIE:

Gdy kula osiągnie maksymalną prędkość, wypadkowa sił, działających na kulkę jest równa zero.

$$\overrightarrow{F_{odp}} + \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_{vz}} = 0 \qquad (1)$$

Przepisujemy równanie skalarnie:

$$F_G - F_{odp} - F_{vz} = 0 \qquad (2)$$

Podstawmy do równań (1) i (2):

$$mg - kv_{max} - V\rho_m g = 0 \qquad (3)$$

Z równania (3) wyznaczamy maksymalną prędkość:

$$k = \frac{mg - V\rho_m g}{v_{max}}$$

Za objętość kulki możemy podstawić:

$$V = \frac{m}{\rho_k}$$

wówczas:

$$k = \frac{mg - \frac{m}{\rho_k}\rho_m g}{v_{max}} \qquad (4)$$

<u>*Podpowiedź 3*</u>

Spójrz na siły działające na kulkę i napisz równanie ruchu dla niej.

ROZWIĄZANIE:

Równanie ruchu dla kulki:

$$\overrightarrow{F_{odp}} + \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_{vz}} = ma \qquad (5)$$

Aby zapisać równania ruchu skalarnie, wprowadźmy układ odniesienia. Oś y orientujemy wzdłuż kierunku ruchu kulki. Oś *y* jest prostopadła do osi *x*.

$$F_G - F_{odp} - F_{vz} = ma \qquad (6)$$

Do równania 6 podstawiamy wyrażenia opisujące siły:

$$mg - kv - V\rho_m g = ma \quad (7)$$

W równaniu (7) przyspieszenie możemy wyrazić jako zmianę szybkości w czasie, zatem:

$$mg - kv - V\rho_m g = m\frac{dv}{dt} \quad (8)$$

Objętość kulki możemy wyrazić jako:

$$V = \frac{m}{\rho_k} \quad (9)$$

Gdzie:

ρ_k gęstość kulki

m masa kulki

Równanie (9) podstawiamy do równania (8):

$$mg - kv - \frac{m}{\rho_k}\rho_m g = m\frac{dv}{dt} \quad (10)$$

Zastosujmy pewne podstawienie:

$$\frac{m}{\rho_k}\rho_m = m' \quad (11)$$

Wzór (11) podstawiamy do równania (10)

$$mg - kv - m'g = m\frac{dv}{dt} \quad (12)$$

W ten sposób otrzymaliśmy pierwsze równanie różniczkowe o stałych współczynnikach. Będziemy je rozwiązywać przez rozdzielenie zmiennych:

Na początku dzielimy przez m:

$$\frac{(m - m')g}{m} - \frac{kv}{m} = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{k}{m}\left(v - \frac{(m - m')g}{k}\right) = \frac{dv}{dt}$$

Rozdzielamy zmienną v od zmiennej t i całkujemy całe wyrażenie:

$$-\frac{k}{m}dt = \frac{dv}{v - \frac{(m - m')g}{k}} /* \int$$

$$-\frac{k}{m}t + C = ln\left|v - \frac{(m - m')g}{k}\right|$$

Logarytmujemy obustronnie:

$$e^{-\frac{k}{m}t + C} = \left|v - \frac{(m - m')g}{k}\right|$$

$$e^{-\frac{k}{m}t} * e^{C} = \left| v - \frac{(m-m')g}{k} \right|$$

Wyrażenie e^{C} oznaczymy jako stałą K

$$e^{-\frac{k}{m}t} * K = \left| v - \frac{(m-m')g}{k} \right| \tag{13}$$

Wyrażenie:

$$\frac{(m-m')g}{k}$$

jest równe równaniu (4), w którym policzyliśmy maksymalną prędkość

$$v_{max} = \frac{mg - \frac{m}{\rho_k}\rho_m g}{k}$$

Dla prędkości $v \leq v_{max}$

$$\left| v - \frac{(m-m')g}{k} \right| = -v + \frac{(m-m')g}{k}$$

Wartość stałej K należy ustalić z warunków początkowych. Dla $t = 0$ $v = 0\frac{m}{s}$, zatem:

$$e^{0} * K = -0 + \frac{(m-m')g}{k}$$

$$K = \frac{(m-m')g}{k}$$

Podstawiając do równania (13)

$$\frac{(m-m')g}{k} e^{-\frac{k}{m}t} = -v + \frac{(m-m')g}{k}$$

$$v(t) = \frac{(m-m')g}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{14}$$

<u>ODPOWIEDŹ</u>

Maksymalna prędkość kulki wynosi:

$$v_{max} = \frac{mg - \frac{m}{\rho_k}\rho_m g}{k}$$

Równanie opisujące prędkość kulki w miodzie w funkcji czasu to:

$$v(t) = \frac{(m-m')g}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

4.2. Wahadło matematyczne (rzeczywiste)

Rozważmy wahadło matematyczne w postaci masy m zawieszonej na nieważkiej nici o długości L=1m. Wahadło wykonuje oscylacje z amplitudą θ_o= 45°. Pomijając opory, znajdź wyrażenie na okres drgań wahadła i porównaj z okresem otrzymanym dla małych wychyleń wahadła. Przez θ oznaczamy kąt wychylenia wahadła.

Wskazówka

Korzystamy z zasady zachowania energii.

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = mgL(1-\cos\theta_o)$$

którą możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_o) \qquad (1)$$

Pamiętając, że

$$\cos\theta - \cos\theta_o = 2\left(\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

równanie (1) przyjmuje postać

$$\left[\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{dt}\right]^2 = \frac{g}{L}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Rozdzielając zmienne otrzymujemy

$$\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{sin^2\frac{\theta_O}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}}} = \omega dt \qquad (2)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Przyjmujemy teraz zmienną pomocniczą u, $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin u$

Dla zmiennej tej zachodzi związek

$$\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sin\frac{\theta_o}{2}\sqrt{1-\sin^2 u}=\sin\frac{\theta_o}{2}\cos u$$

Między zmiennymi θ i u zachodzi też zależność

$$\cos\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta_0}{2}\cos u du$$

Lewą stronę równania (2) możemy zapisać jako

$$\frac{d(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1}{\sin\frac{\theta_o}{2}\cos u}\frac{\sin\frac{\theta_o}{2}\cos u du}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_o}{2}\sin^2 u}}$$

Mamy więc

$$\omega t=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}$$

Okres T otrzymujemy przyjmując, że dla $t=T/4$, $\theta=\theta_0$, czyli $u=\pi/2$:

$$T=4\sqrt{\frac{L}{g}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}} \qquad (3)$$

Całkę pod pierwiastkiem nazywamy całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju.

Zauważmy, że wynik (3) zawiera dobrze znaną zależność

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (3')$$

prawdziwą dla małych wychyleń. W tym przypadku $\theta_0\to 0$ i wartość całki we wzorze (3) dąży do $\pi/2$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\frac{\theta_o}{2}sin^2u}}=1+\frac{1}{2}sin^2\frac{\theta_o}{2}sin^2u+\frac{3}{8}sin^4\frac{\theta_o}{2}sin^4u$$

Ogólnie, możemy uzyskać zależność dla T rozwijając w szereg wyrażenie pod pierwiastkiem całkując wyraz po wyrazie.

co po podstawieniu do całki we wzorze (3) daje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\frac{1}{4}sin^2\frac{\theta_o}{2}+\frac{9}{64}sin^4\frac{\theta_o}{2}+\cdots\right] \qquad (4)$$

Przypominamy, że: $I_n = \int_\alpha^\beta sin^n u du = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} u sin^{n-1} u I_\alpha^\beta$

Obliczenia liczbowe

Podstawiając dane wartości liczbowe, różnica między wynikiem (4) a tym określonym dla małych drgań (3) dana jest przez: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}} sin^2 \frac{\theta_o}{2}\left[1 + \frac{9}{16} sin^2 \frac{\theta_o}{2}\right] = 0{,}079s$

Błąd wynikający z przyjęcia wzory przybliżonego (3'), który daje *T*=2.006 s wynosi zaledwie 0.39%.

[DS i GK, wg G. Consolati, *Fisica generale*, EtasLibri, Milano, 1994.]