Wir untersuchen ferner den Gang der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit durch die Gleichung

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

gegeben, also gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie durch die Gleichung

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0 . \tag{73}$$

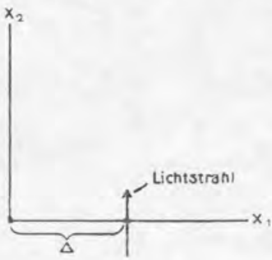
Ist die Richtung, d. h. das Verhältnis $dx_1 : dx_2 : dx_3$ gegeben, so liefert die Gleichung (73) die Größen

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4}$$

und somit die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma ,$$

im Sinne der Euklidischen Geometrie definiert. Man erkennt leicht, daß die Lichtstrahlen gekrümmt verlaufen müssen mit Bezug auf das Koordinatensystem, falls die $g_{\mu\nu}$ nicht konstant sind. Ist n eine Richtung senkrecht zur Lichtfortpflanzung, so ergibt das Huggenssche Prinzip, daß der Lichtstrahl [in der Ebene (γ, n) betrachtet] die Krümmung $-d\gamma/\partial n$ besitzt.



Wir untersuchen die Krümmung, welche ein Lichtstrahl erleidet, der im Abstand Δ an einer Masse M vorbeigeht. Wählt man das Koordinatensystem gemäß der vorstehenden Skizze, so ist die gesamte Biegung B des Lichtstrahles (positiv gerechnet, wenn sie nach dem Ursprung hin konkav ist) in genügender Näherung gegeben durch

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dx_2 ,$$

während (73) und (70) ergeben

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 + \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right) \cdot$$

Die Ausrechnung ergibt

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\varkappa M}{4\pi\Delta} \cdot \tag{74}$$

Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Biegung von 1,7″, ein am Planeten Jupiter vorbeigehender eine solche von etwa 0,02″.

Berechnet man das Gravitationsfeld um eine Größenordnung genauer, und ebenso mit entsprechender Genauigkeit die Bahnbewegung eines materiellen Punktes von relativ unendlich kleiner Masse, so erhält man gegenüber den Kepler-Newtonschen Gesetzen der Planetenbewegung eine Abweichung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom Betrage

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \tag{75}$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet a die große Halbachse, c die Lichtgeschwindigkeit in üblichem Maße, e die Exzentrizität, T die Umlaufszeit in Sekunden.[1])

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um 43″ pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen (Leverrier); diese fanden nämlich einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Größe.

---

1) Bezüglich der Rechnung verweise ich auf die Originalabhandlungen A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 47. p. 831. 1915. — K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 7. p. 189. 1916.

(Eingegangen 20. März 1916.)