3.9. Szpula Pana Hieronima

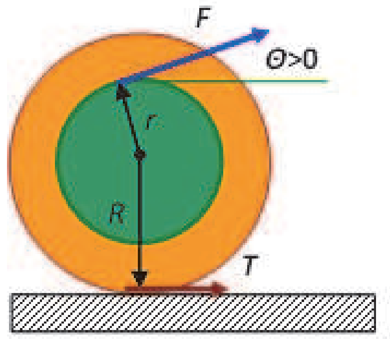
Pan Hieronim pokazuje taką „sztuczkę”: na szpulę o wewnętrznym promieniu r i promieniu zewnętrznym R jest nawinięty giętki pas. Pan Hieronim, odpowiednio unosząc albo opuszczając ten pas, „pociąga” szpulkę do siebie albo od siebie. Jaki jest graniczny kąt θ_o, od którego szpulka zaczyna się poruszać w jednym albo drugim kierunku? Ile wynosi przyspieszenie dla kąta $\theta_o+10°$ i $\theta_o-10°$. Czy szpulka toczy się, czy ślizga dla tych kątów?

Przeprowadź obliczenia, przyjmując masę szpulki 2 kg, siłę ciągnącą szpulkę F = 10 N, promień r = 5 cm, R = 10 cm i współczynnik tarcia μ_s = 0,4. Zakładamy dla celów obliczenia momentu bezwładności, że szpulka jest jednorodnym walcem o promieniu R.

Dane:

R = 10 cm – promień zewnętrzny szpulki,
r = 5 cm – promień, na jakim działa siła $\boldsymbol{F}$,
μ_s = 0,4 – współczynnik tarcia (statycznego),
m = 2 kg – masa szpulki,
F = 10 N – siła ciągnąca,
a – przyspieszenie środka masy szpulki.

Wskazówka: Zadanie przypomina poprzedni problem, różni się tylko kątem θ nachylenia siły F w stosunku do poziomu.



Równania ruchu

Równania ruchu to dwa równania II zasady dynamiki Newtona: ruchu translacyjnego środka masy i ruchu obrotowego wokół tego środka masy. Dla ruchu translacyjnego (tj. w kierunku poziomym) mamy

$$F\cos\theta + T = ma. \qquad (1)$$

Zgodnie z rysunkiem zakładamy przyspieszenie i siły za dodatnie, jeśli działają w prawo. Promień r uważamy za dodatni, jeśli punkt przyłożenia siły leży nad środkiem obrotu szpulki (jak na rysunku). Kąt θ między kierunkiem poziomym, a siłą zmienia się w zakresie $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Dla ruchu obrotowego szpulki mamy

$$Fr - TR = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}mRa\,. \qquad (2)$$

Zauważ, że w równaniu (1) siły F i T się dodają, bo działają w tym samym kierunku, natomiast ich momenty sił, Fr i TR, odejmują się, jako że powodują obrót szpulki w przeciwnych kierunkach.

Zadanie rozwiązujemy analogicznie jak sposób II w poprzednim przykładzie. Rozwiązaniem układu równań (1) – (2) jest

$$a = \frac{2F}{3m}\frac{R\cos\theta + r}{R} \tag{3}$$

i

$$T = \frac{F}{3R}(2r - R\cos\theta)\,. \tag{4}$$

Kierunek toczenia się

W odróżnieniu od poprzedniego zadania, przyspieszenie środka masy może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Decyduje o tym znak sumy ($r + R\cos\theta$). Dla ujemnego r (czyli taśmy zaczepionej u dołu szpulki) i kąta θ takiego, że $\cos\theta < \frac{|r|}{R}$, czyli $|\theta| > \arccos\frac{|r|}{R}$ przyspieszenie staje się ujemne: szpulka ze stanu spoczynku zaczyna toczyć się w lewo. Przy mniejszym kącie nachylenia taśmy przyspieszenie jest skierowane w prawo. Przypominamy, z poprzedniego zadania, że przy kącie $\theta = 0$ (i $|r| < R$) szpulka toczy się zawsze w prawo.

Maksymalna siła F

Istotny jest warunek toczenia się szpulki (tzn. braku poślizgu). Siła nacisku szpulki na podłoże N wyraża się wzorem

$$N = mg - F\sin\theta\,. \tag{5}$$

Dla zapewnienia się toczenia, siła tarcia T nie może przekroczyć maksymalnej wartości

$$|T| \le T_{\max} = \mu_s(mg - F\sin\theta)\,. \tag{6}$$

Zgodnie z równaniem (4) nakłada to ograniczenie na maksymalną siłę F.

Obliczenia numeryczne

Dla taśmy zaczepionej od dołu szpulki i przy podanych promieniach warunek $r + R\cos\theta = 0$ otrzymuje się dla $\theta_o = 60°$.

Dla kąta $\theta = 70°$ otrzymujemy ze wzoru (3) $a = -0{,}42$ m/s^2 (szpulka przyspiesza w lewo),

a dla kąta $\theta = 50°$ otrzymujemy $a = +0{,}38$ m/s^2 (szpulka przyspiesza w prawo).

Siła tarcia (wzór 4) wynosi odpowiednio $T = -3{,}58$ N dla $\theta = 70°$ i $T = -4{,}38$ N dla $\theta = 50°$.

Graniczne wartości siły tarcia (wzór 6) wynoszą $T_{\max} = 4{,}84$ N dla $\theta = 70°$ i $T = 5{,}40$ N dla $\theta = 50°$. W żadnym przypadku działająca siła tarcia nie przekracza maksymalnej siły tarcia statycznego.

Sprawdź, że szpulka, przy podanych kątach, będzie się ślizgała już dla siły 9,5 N.

Zadanie numeryczne. Znajdź, poprzez iterację numeryczną, do jakiego kąta należy zmniejszyć pochylenie siły 9,5 N, aby szpulka się nie ślizgała.

zob. też P. Mazzoldi, A. Saggion, C.Voci, *Problemi di fisica generale*, Padova, zad. 6.55.