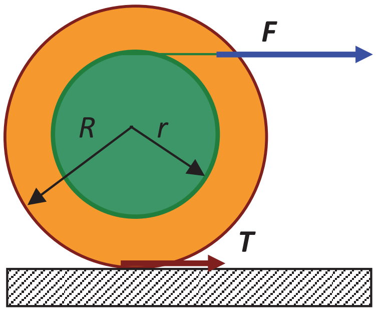
3.8. Kot i szpulka nici

Kot wyciąga nić ze szpulki. Zakładamy, że szpulka toczy się, a nie ślizga. Z jakim przyspieszeniem się ona toczy?

Promień zewnętrzny szpulki wynosi R, a promień części wewnętrznej, na której jest nawinięta nić, wynosi r. Współczynnik tarcia szpulki o podłogę wynosi μ, masa szpulki wynosi m, a kot ciągnie z siłą F. Załóż, że masa szpulki jest rozłożona równomiernie w walcu o promieniu R.

Dane:
R – promień zewnętrzny szpulki,
r – promień, na jakim działa siła $\boldsymbol{F}$,
μ_s – współczynnik tarcia (statycznego),
a – przyspieszenie środka masy szpulki,
m – masa szpulki.

Podpowiedź 1: Zrób rysunek według danych z treści zadania.

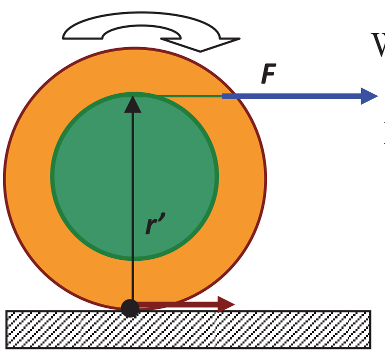


Narysowaliśmy zwrot siły tarcia $\boldsymbol{T}$ na prawo, ale jeszcze nie wiemy, czy w tym kierunku ona działa.

Warunek pomocniczy. Założyliśmy, że szpulka się toczy, a nie sunie (nie ślizga po podłodze).

Jeżeli szpulka się nie ślizga, każdorazowy punkt oparcia szpulki o podłogę pozostaje w spoczynku. Mamy dwa sposoby na rozwiązanie zadania.

Sposób I. Rozważamy, że szpulka obraca się wokół nie poruszającej się osi, czyli wokół punktu oparcia.



Wybranie punktu obrotu, jak na rysunku obok, znacznie upraszcza rozwiązanie: promień działania siły tarcia dla tak wybranego punktu obrotu wynosi *zero*.

Siła tarcia jest siłą tarcia statycznego – i podobnie jak w przypadku klocka na równi, „dostosowuje się” ona do działającej siły $\boldsymbol{F}$ aż do największej dopuszczalnej wartości $T \leq \mu mg$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Podpowiedź 2: Rozważ momenty sił.

Moment siły tarcia wynosi zero (jej promień działania wynosi zero). Wartość momentu siły $\boldsymbol{F}$ wynosi

$$M = F\,r', \text{ gdzie } r' = R + r. \tag{1}$$

Przyspieszenie szpulki wyliczymy z II prawa Newtona dla ruchu obrotowego bryły sztywnej. Przyspieszenie kątowe ε wiąże się z przyspieszeniem liniowym punktów na obwodzie za pomocą wzoru podobnego do związku między *prędkością* liniową v a prędkością kątową ω (czyli $v = \omega R$).

Jeżeli szpulka się nie ślizga, przyspieszenie liniowe a środka masy szpulki jest równe przyspieszeniu liniowemu punktów na obwodzie. Mamy więc

$$a = \varepsilon R. \tag{2}$$

II prawo Newtona dla ruchu obrotowego ma postać

$$M = I\,\varepsilon, \tag{3}$$

gdzie M jest momentem przyłożonej siły a I – momentem bezwładności szpulki.

Moment bezwładności szpulki wokół osi obrotu pokrywającej się z jej środkiem wynosi

$$I_1 = ½\, mR^2. \tag{4}$$

Wybrana przez nas oś obrotu jest jednak inna: zgodnie z twierdzeniem Steinera, moment bezwładności wokół tej osi wynosi

$$I = I_1 + mR^2. \tag{5}$$

Uwzględniając wszystkie powyższe zależności, możemy zapisać równanie (3) jako

$$F(R+r) = \frac{3}{2} mR^2 \frac{a}{R}, \tag{6}$$

skąd otrzymujemy

$$a = \frac{2}{3} \frac{(R+r)}{R} \frac{F}{m}. \tag{7}$$

Siła tarcia T musi przyjąć taką wartość, aby było spełnione II prawo Newtona w postaci

$$\sum F = ma. \tag{8}$$

Suma sił w równaniu (8), przy założonym kierunku siły T jak na rysunku wynosi $(F + T)$; zastąpiwszy przyspieszenie a wyrażeniem z równania (7), otrzymujemy

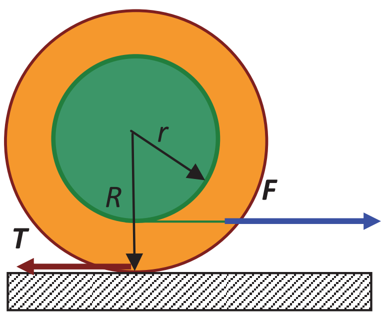
$$F + T = \frac{2}{3} F \frac{R+r}{R}. \tag{9}$$

Siła tarcia, aby szpulka toczyła się a nie sunęła, wyraża się więc wzorem

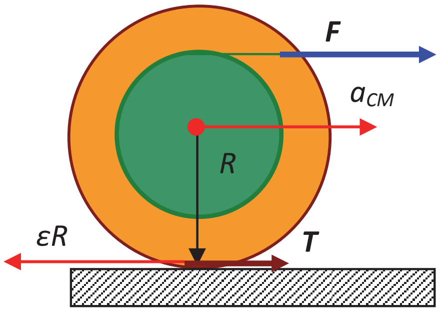
$$T = F \frac{2r - R}{3R} \tag{10}$$

Siła tarcia T zmienia znak w zależności od znaku wyrażenia $(2r\text{-}R)$. Jest ona dodatnia (czyli skierowana na prawo) dla $r > R/2$ (czyli jak na naszym pierwszym rysunku). Dla $r = R/2$ (czyli jeśli szpulka jest w połowie odwinięta), siła tarcia nie jest potrzebna dla zapewnienia toczenia szpulki, $T = 0$.

Dla $-R < r < R/2$ siła tarcia jest ujemna, czyli skierowana na lewo. Dotyczy to w szczególności wartości $r < 0$, czyli przypadku, jak pokazany na rysunku poniżej.



Sposób II (prostszy). Rozwiążemy to samo zadanie biorąc za punkt obrotu środek szpulki.



W układzie środka masy moment bezwładności szpulki wyraża się wzorem (4). Przez a oznaczamy przyspieszenie środka masy, a przez ε przyspieszenie kątowe szpulki. Związkiem między tymi wielkościami jest nadal, jak poprzednio, równanie (2).

Do opisu ruchu skorzystamy z II zasady Newtona dla ruchu środka masy i dla ruchu obrotowego.

Równanie dla sił ma postać:

$$F + T = ma, \tag{11}$$

zgodnie z rysunkiem zakładamy przyspieszenie i siły za dodatnie, jeśli działają w prawo. Równanie dla momentów sił ma postać

$$Fr - TR = I_1\varepsilon, \tag{12}$$

siły T i F wywołują przeciwne momenty sił.

Wyznaczając T z równania (11) i podstawiając do równania (12), otrzymujemy

$$Fr - (ma - F)R = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R}, \tag{13}$$

a stąd

$$a = \frac{Fr + FR}{{}^1\!/_2\, mR + mR} = \frac{2F}{3m}\frac{r+R}{R} \tag{14}$$

i z równania (11)

$$T = F\frac{2(r+R)}{3R} - F = F\frac{2r - R}{3R}, \tag{15}$$

czyli wyniki jak poprzednio.

Komentarz I: Dla $r = R/2$, czyli z równania (15) w warunkach braku siły tarcia, $T = 0$, przyspieszenie środka masy wynosi $a = F/m$. Dla $r = R$ przyspieszenie środka ciężkości szpulki wynosi $a = 4/3\ (F/m)$, czyli więcej, niż gdyby przyspieszała szpulka ($a' = F/m$), zaczepiona za środek i w warunkach *braku* tarcia (czyli swobodnego ślizgania się szpulki).

Dzieje się tak, ponieważ dla $r > R/2$ siła tarcia działa w tym samym kierunku co siła pociągająca. Przyzwyczajeni jesteśmy, że siła tarcia przeciwstawia się ruchowi – w tym przypadku siła tarcia „wspomaga” siłę pociągającą. Stąd przyspieszenie jest większe niż w przypadku *braku* tarcia. Jak wygląda więc prawo zachowania energii?

Komentarz II: Jeżeli rozważylibyśmy tę sytuację z punktu widzenia prawa zachowania energii, to nie ma zysku energii „z niczego”. Załóżmy dla $r = R$, że szpulka startuje ze stanu spoczynku. Po czasie t uzyskuje ona prędkość

$$\mathrm{v} = \frac{4F}{3m}t. \tag{16}$$

Energia kinetyczna, zgodnie z twierdzeniem Königa, składa się z energii kinetycznej ruchu translacyjnego środka masy i energii ruchu obrotowego wokół środka masy

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mr^2}{2}\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}m\left(\frac{16F^2}{9m^2}t^2\right) = \frac{4F^2t^2}{3m}. \tag{17}$$

Przesunięcie środka masy wyniosło w tym czasie

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{4Ft^2}{3m} = \frac{2Ft^2}{3m}, \tag{18}$$

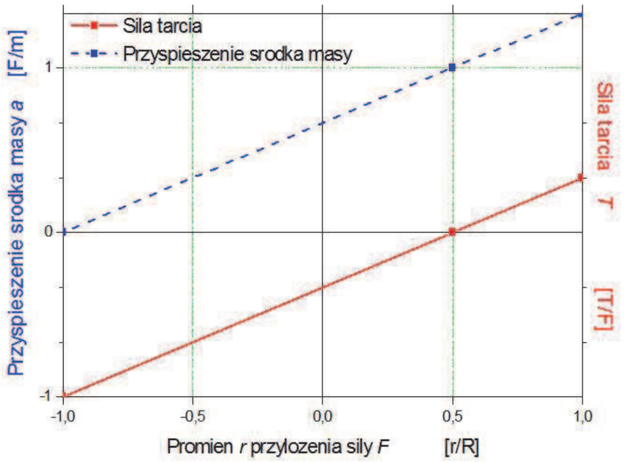
ale przesunięcie ciągnącego sznurka dwa razy więcej.

Praca wykonana przez ciągnącego sznurek kota wyniosła więc

$$W = 2Fs = \frac{4F^2}{3m}t^2, \tag{19}$$

czyli tyle, ile przyrost energii kinetycznej szpulki w tym samym czasie. Innymi słowy, siła tarcia, mimo że „wspomaga" toczenie się, nie wykonuje pracy – przesunięcie punktu oparcia (czyli tam gdzie jest zaczepiony wektor siły tarcia, zob. rys. 2) wynosi zero.

Komentarz III: Rozważmy dokładniej wartość siły tarcia T, wzór (10). Dla danego r rośnie ona liniowo wraz z siłą F, od ujemnej wartości $T = -F$ dla $r = -R$ do wartości dodatniej $T = F/3$ dla $r = R$, jak to ilustrujemy na wykresie poniżej.



W podobny sposób, liniowo ze zmianą r/R rośnie przyspieszenie, od wartości zerowej dla $r = -R$ do wartości $a = 4/3(F/m)$ dla $r = +R$.

Komentarz IV: Siła tarcia jest statyczna, to znaczy jej wartość nie może przekroczyć $T = \mu_s mg$, ale na siłę F nie nakładaliśmy dotąd żadnych ograniczeń. Innymi słowy, aby ruch miał charakter toczenia się, dla określonej masy szpulki m siła F nie może przekraczać wartości

$$F \le \frac{3R}{|2r - R|}\mu_s mg = F_{\max}. \tag{20}$$

Maksymalna siła, która nie powoduje jeszcze poślizgu, zmienia się od wartości $F_{\max} = \mu_s mg$ dla $r = -R$ do $F_{\max} = 3\mu_s mg$ dla $r = R$.

Uwaga dla amatorów sportowej jazdy

Ruch koła samochodowego przypomina toczenie się szpulki, ale punkt przyłożenia siły F jest inny: to nie sznurek pociąga szpulką, ale opona samochodu „odpycha" drogę w punkcie podparcia. Aby koło nie wpadło w poślizg, to maksymalna siła trakcyjna nie może przekroczyć siły tarcia statycznego $F_{\max} = \mu_s mg$, a maksymalne możliwe przyspieszenie (osi koła, czyli i całego samochodu) wynosi $a_{\max} = \mu_s g$.

Niezależnie od siły (stycznej) przyłożonej do kół (a zależnie od stanu opon) przyspieszenie jest odpowiednio mniejsze od g. Co najwyżej, opony „przypalą się" a samochód i tak nie osiągnie większego przyspieszenia niż g! No chyba że użyjemy napędu odrzutowego.

zob. też P. Mazzoldi, A. Saggion, C.Voci, *Problemi di fisica generale*, Padova, zad. 6.55.