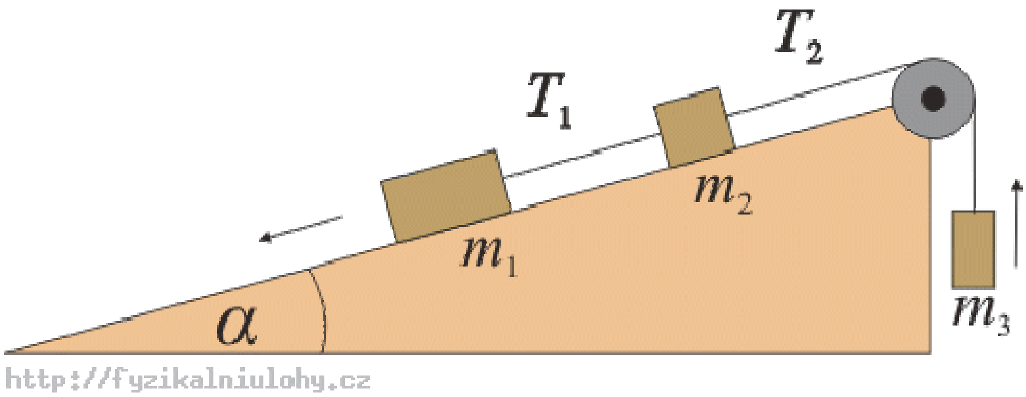
2.20. Równia pochyła – trzy ciała

Układ ciał przedstawiony na rysunku zjeżdża w dół po równi pochyłej. Określ wartość przyspieszenia układu oraz sił napinających nici T_1, T_2. Współczynnik tarcia pomiędzy ciałami i powierzchnią równi wynosi f. Zaniedbujemy moment bezwładności bloczka i masę sznurka.



Podpowiedź 1

Naszkicuj rysunek i zaznacz, jakie siły działają na ciała umieszczone na równi pochyłej. Zapisz odpowiednie równania ruchu.

ROZWIĄZANIE

Siły działające na ciała:

Na pierwsze ciało o masie m_1 działają siły:

$\overrightarrow{F_{G1}}$ – ciężar ciała,

$\overrightarrow{N_1}$ – siła reakcji podłoża,

$\overrightarrow{T_1}$ – siła napinająca pierwszy sznurek,

$\overrightarrow{F_{t1}}$ – siła tarcia.

Na drugie ciało o masie m_2 działają siły:

$\overrightarrow{F_{G2}}$ – ciężar ciała,

$\overrightarrow{N_2}$ – siła reakcji podłoża,

$\overrightarrow{T_2}$ – siła napinająca drugi sznurek,

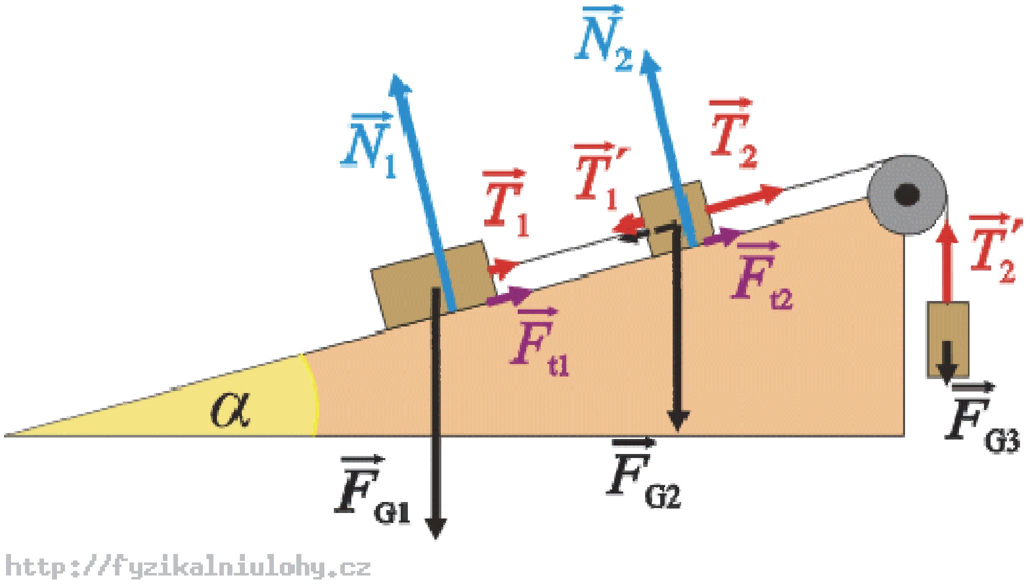
$\overrightarrow{T_1'}$ – siła napinająca pierwszy sznurek,

$\overrightarrow{F_{t2}}$ – siła tarcia.

Na trzecie ciało o masie m_3 działają siły:

$\overrightarrow{F_{G3}}$ – ciężar ciała,

$\overrightarrow{T_2'}$ – siła napinająca drugi sznurek.



Równania ruchu dla poszczególnych mas:

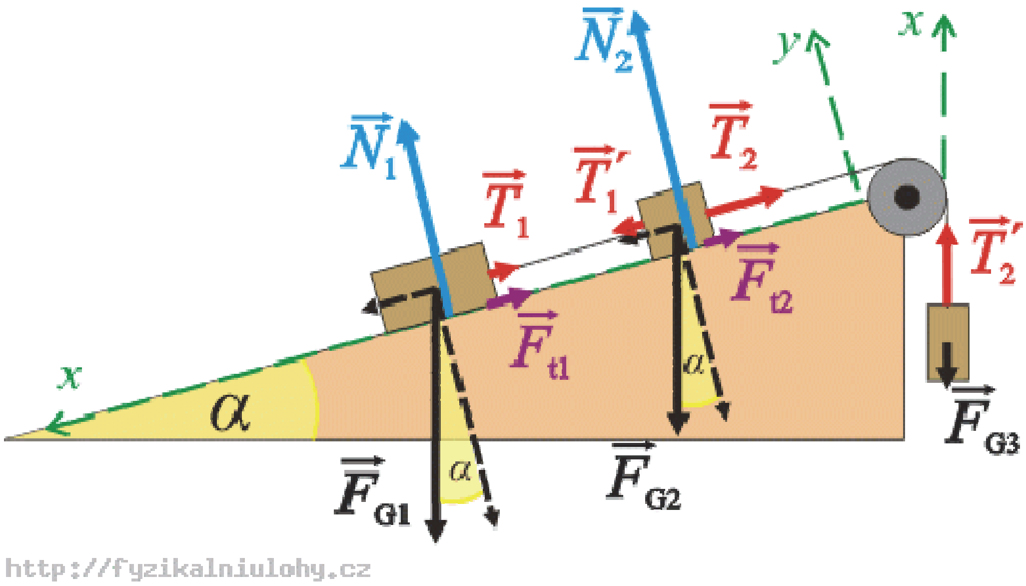
Wszystkie 3 masy są połączone sznurkiem, poruszają się więc z tym samym przyspieszeniem.

$$m_1\colon \overrightarrow{F_{G1}} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{F_{t1}} + \overrightarrow{T_1} = m_1\vec{a},$$

$$m_2\colon \overrightarrow{F_{G2}} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{F_{t2}} + \overrightarrow{T_1'} + \overrightarrow{T_2} = m_2\vec{a},$$

$$m_3\colon \overrightarrow{F_{G3}} + \overrightarrow{T'_2} = m_3\vec{a}.$$

Aby równania ruchu przepisać skalarnie, wprowadźmy układ współrzędnych *x*, *y* tak, by oś *x* wskazywała kierunek ruchu. Dla ciał o masach m_1i m_2 oś *x* jest równoległa do równi, dla ciała m_3– pionowa. Oś *y* jest zawsze prostopadła do osi *x*.



Siły $\overrightarrow{F_{G1}} i \overrightarrow{F_{G2}}$ rozkładamy na 2 składowe:

$$F_{G1_x} = F_{G1} sin\alpha,$$

$$F_{G1_y} = F_{G1} \cos\alpha,$$

$$F_{G2_x} = F_{G2} \sin\alpha,$$

$$F_{G2_y} = F_{G2} \cos\alpha.$$

Zapiszmy równania ruchu skalarnie (pamiętając, że zgodnie z wybranym zwrotem osi x siły wzdłuż równi są dodatnie, jeśli działają na lewo w dół):

$$m_{1x}: F_{G1} sin\alpha - F_{t1} - T_1 = m_1 a, \quad (1)$$

$$m_{2x}: F_{G2} sin\alpha - F_{t2} + T_1' - T_2 = m_2 a, \quad (2)$$

$$m_{3x}: - F_{G3} + T_2' = m_3 a, \quad (3)$$

$$m_{1y}: N_1 - F_{G1} cos\alpha = 0, \quad (4)$$

$$m_{2y}: N_2 - F_{G2} cos\alpha = 0. \quad (5)$$

W kierunku osi y ruch się nie odbywa, więc dwa ostatnie równania przyrównujemy do zera.

Zaniedbując moment bezwładności krążka, możemy przyrównać do siebie siły działające na końcach sznurków. Masa m_3 działa za pośrednictwem sznurka na masę m_2, a masa m_2 odpowiada, działając siłą reakcji na masę m_3. Podobnie oddziałują masy m_1 i m_2. Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona siły te są jednakowe co do wartości:

$$\left|\overrightarrow{T_1}\right| = \left|\overrightarrow{T_1'}\right| \text{ czyli } T_1 = T_1',$$

$$\left|\overrightarrow{T_2}\right| = \left|\overrightarrow{T_2'}\right| \text{ czyli } T_2 = T_2'.$$

Podpowiedź 2

Zastanów się, od czego zależy wartość sił tarcia i jak je możemy obliczyć.

ROZWIĄZANIE

Siły tarcia:

Siła tarcia zależy od siły nacisku ciała na równię. Tej z kolei, zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona, odpowiada siła reakcji podłoża. Zapiszmy to za pomocą równań:

$$F_{t1} = fN_1,$$

$$F_{t2} = fN_2.$$

Siły N_1 i N_2 obliczamy z równań (4) i (5):

$$N_1 = F_{G1} cos\alpha,$$

$$N_2 = F_{G2} cos\alpha.$$

Na siły tarcia uzyskamy wyrażenia:

$$F_{t1} = fF_{G1} cos\alpha,$$

$$F_{t2} = fF_{G2} cos\alpha.$$

Podstawiając do równań ruchu (1) i (2):

$$m_{1x}:\ F_{G1}sin\alpha - fF_{G1}cos\alpha - T_1 = m_1 a, \tag{6}$$

$$m_{2x}:\ F_{G2}sin\alpha - fF_{G2}cos\alpha + T_1 - T_2 = m_2 a. \tag{7}$$

Podstawiamy:

$$F_{G1} = m_1 g, F_{G2} = m_2 g, F_{G3} = m_3 g.$$

i przepiszmy równania (6), (7) i (3):

$$m_{1x}:\ m_1 gsin\alpha - fm_1 gcos\alpha - T_1 = m_1 a, \tag{8}$$

$$m_{2x}:\ m_2 gsin\alpha - fm_2 gcos\alpha + T_1 - T_2 = m_2 a, \tag{9}$$

$$m_{3x}: -m_3 g + T_2 = m_3 a. \tag{10}$$

<u>*Podpowiedź 3*</u>

Uzyskaliśmy 3 równania (8), (9), (10) z trzema niewiadomymi. Po rozwiązaniu układu otrzymamy wartość przyspieszenia i sił napinających nici.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Najpierw wyznaczmy wartość przyspieszenia *a*:

Sumując stronami równania (8), (9) i (10), otrzymujemy:

$$m_1 gsin\alpha - m_1 gfcos\alpha + m_2 gsin\alpha - m_2 gfcos\alpha - m_3 g = m_2 a + m_3 a + m_1 a,$$

$$a = \frac{m_1 gsin\alpha - fm_1 gcos\alpha + m_2 gsin\alpha - m_2 fgcos\alpha - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$a = \frac{g[m_1(sin\alpha - fcos\alpha) + m_2(sin\alpha - fgcos\alpha) - m_3]}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$a = \frac{g[(m_1 + m_2)(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3]}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{11}$$

Następnie określamy wartość siły napinającej pierwszą nić T_1:

Podstawmy wartość przyspieszenia z równania (11) do równania (8):

$$m_1 gsin\alpha - fm_1 gcos\alpha - T_1 = m_1 \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Wyznaczmy T_1:

$$T_1 = m_1 gsin\alpha - m_1 gfcos\alpha - m_1 \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$T_1 = m_1 g(sin\alpha - fcos\alpha) - m_1 \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika i porządkujemy:

$$T_1 = \frac{m_1 g(sin\alpha - fcos\alpha)[(m_1 + m_2 + m_3) - (m_1 + m_2)] + m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_3 g(sin\alpha - fcos\alpha) + m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_3 g(1 + sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

A teraz określmy wartość siły T_2:

T_2 wyznaczamy z równania (10):

$$T_2 = m_3(a + g).$$

Podstawimy wyrażenie na przyspieszenie (11):

$$T_2 = m_3\left[\frac{(m_1 + m_2)g(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} + g\right].$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika i porządkujemy:

$$T_2 = m_3\left[\frac{(m_1 + m_2)g(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3 g + (m_2 + m_1)g + m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}\right],$$

$$T_2 = \frac{m_3 g(m_1 + m_2)(1 + sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

<u>Podsumowanie</u>

Wartość przyspieszenia układu wynosi

$$a = \frac{g(m_1 + m_2)(sin\alpha - fcos\alpha) - m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Wartość siły napinającej sznurek pomiędzy m_1 i m_2

$$T_1 = \frac{m_1 m_3 g(1 + sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Wartość siły napinającej sznurek pomiędzy m_2 i m_3

$$T_2 = \frac{m_3 g(m_1 + m_2)(1 + sin\alpha - fcos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Zauważ, że siła T_2 jest większa od siły T_1.