2.13. Kulka na równi

Kulka stalowa znajdująca się na szczycie gładkiej równi pochyłej zaczęła poruszać się w dół równi z przyspieszeniem 0,5 $\mathrm{m/s^2}$. Kiedy znalazła się już na dole, poruszała się dalej po poziomym stoliku. W ciągu 12 s pokonała drogę całkowitą 20 metrów. Oblicz czas ruchu kulki na równi pochyłej. Siłę tarcia można pominąć.

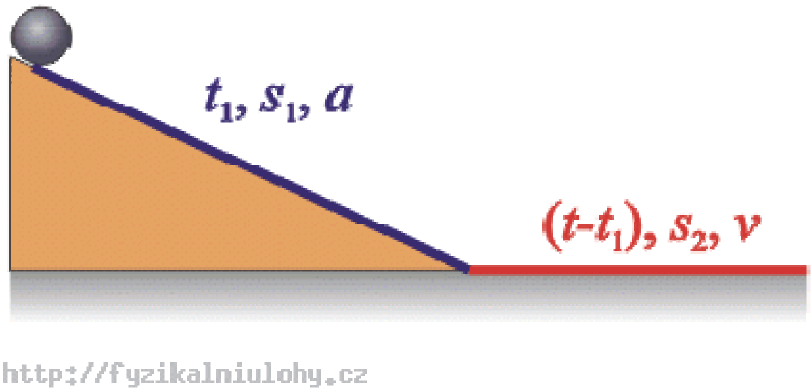
Podpowiedź 1: Wypisz dane, które znamy z treści zadania.

ROZWIĄZANIE

$a = 0{,}5\ \mathrm{m/s^2}$ – przyspieszenie kulki na równi pochyłej,
$s = 20$ m – całkowita droga, jaką pokonała kulka na równi pochyłej i poziomym stoliku,
$t = 12$ s – całkowity czas ruchu kulki,
$t_1 = ?$ (s) – czas ruchu kulki na równi pochyłej.

Podpowiedź 2: Narysuj schemat i zaznacz na nim wszystkie wielkości. Jaką drogę pokona kulka na równi pochyłej i jaka będzie jej prędkość na końcu równi?

ROZWIĄZANIE



Kulka porusza się po równi pochyłej ruchem jednostajnie przyspieszonym i pokonuje w czasie t_1 drogę s_1 oraz uzyskuje końcową prędkość v:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2, \tag{1}$$

$$\mathrm{v} = at_1. \tag{2}$$

Podpowiedź 3: Ruch kulki po poziomym stoliku. Jakim rodzajem ruchu porusza się kulka?

ROZWIĄZANIE

Po poziomym stoliku kulka porusza się ruchem jednostajnym z prędkością v. Drogę pokonaną przez kulkę w czasie $t-t_1$ na poziomym stoliku s_2 można zapisać następująco:

$$s_2 = \mathrm{v}(t - t_1) = at_1(t - t_1). \tag{3}$$

Podpowiedź 4: Jaka jest całkowita droga pokonana przez kulkę?

ROZWIĄZANIE

Kulka po równi pochyłej poruszała się ruchem jednostajnie przyspieszonym i pokonała drogę s_1, natomiast po poziomym stoliku poruszała się ruchem jednostajnym i pokonała drogę s_2.

Zapiszmy wzór na drogę całkowitą:

$$s = s_1 + s_2 , \tag{4}$$

$$s = \frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 (t - t_1) . \tag{5}$$

Po opuszczeniu nawiasów możemy napisać:

$$s = -\frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 t . \tag{6}$$

Porządkujemy równanie kwadratowe:

$$t_1^2 - 2 t t_1 + \frac{2s}{a} = 0 . \tag{7}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe i wybieramy rozwiązanie spełniające następujący warunek: $t_1 < t$, tzn. czas ruchu kulki na równi pochyłej musi być krótszy od czasu całkowitego ruchu na równi i poziomym stoliku.

$$t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} . \tag{8}$$

Podstawiając dane liczbowe do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$t_1 = 12 - \sqrt{12^2 - \frac{2 \cdot 20}{0{,}5}} = 4 \text{ s} . \tag{9}$$

<u>Odpowiedź</u>

Czas ruchu kulki na równi pochyłej wynosi: $t_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} = 4$ s.

<u>*Uwaga*</u>

Rozwiązanie $t_2 = t + \sqrt{t^2 - \frac{2s}{a}} = 20 \text{ s}$ odpowiadałoby sytuacji, w której kulka porusza się jedynie po równi pochyłej. Równanie (6) jest analogiczne do równania ruchu jednostajnie opóźnionego z prędkością początkową równą $v_o = at$ (czyli $v_o = 6$ m/s). Równanie takie ma dwa rozwiązania: $t_1 = 4$ s i $t_1 = 20$ s. Pierwsze rozwiązanie odpowiada sytuacji kulki puszczonej po równi do góry, drugie – podobnie, ale kulka toczy się powyżej punktu o $s = 20$ m, zatrzymuje i ponownie wraca do punktu o $s = 20$ m.

Zauważ, że podobnie dwa rozwiązanie ma równanie piłki rzuconej do góry, jeśli pytamy o czas, w jakim doleci do wyznaczonej wysokości (oczywiście, niższej niż maksymalna wysokość w takim rzucie).