

Stąd

$$v = \frac{1}{n} \left(\frac{ke^2}{\hbar} \right) \quad (2.39)$$

gdzie stałą Rydberga zastąpiliśmy zgodnie ze wzorem (2.34). Prędkość elektronu na pierwszej orbicie Bohra wynosi około 2180 km/s, 200 razy więcej niż prędkość rakiety w locie na Księżyc i w przybliżeniu 1/137 prędkości światła.

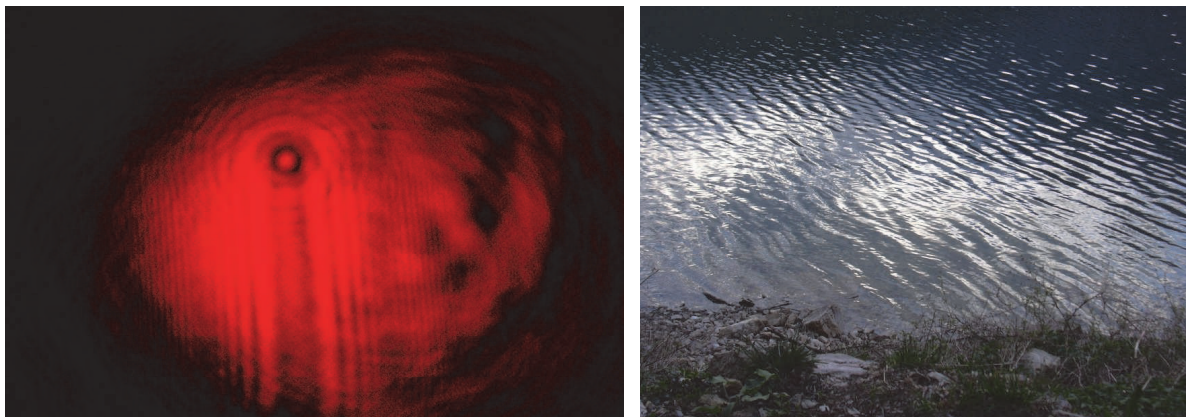
Pytania

1. Jak zmienia się energia z numerem orbity w modelu Bohra?
2. Jak zmienia się promień orbity w modelu Bohra dla różnych n ?
3. Ile wynosi (w eV) stała Rydberga?
4. Jakim przeskokom elektronów odpowiada seria Balmera?
5. Ile wynosi promień pierwszej orbity Bohra?

2.7. Dualizm falowo-korpuskularny

Światło, które ulega ugięciu np. na siatce dyfrakcyjnej musi być falą. Widzimy to bardzo dobrze w dobie laserów. Przedmioty jednolitego koloru, np. biała ściana, oświetlone światłem lasera wydają się „pstkate”, tzn. pojawiają się na nich jaśniejsze i ciemniejsze miejsca. Dzieje się tak, gdyż natężenie fal pochodzących od dwóch lub więcej źródeł sumuje się lub odejmuje, w zależności czy do określonego punktu w określonym momencie docierają dwa maksima czy minimum i maksimum fali. Mówimy o zjawisku interferencji. Interferencja dwóch fal: padającej i odbitej jest powodem powstawania kolorów w bańkach mydlanych.

Na przeszkodach, jak kółek w jeziorze, fala ugina się i zmienia kierunek rozchodzenia się. Mówimy o zjawisku dyfrakcji³⁵. Zjawisko ugięcia światła na mini-łepku szpilki pokazujemy na fot. 2.24.



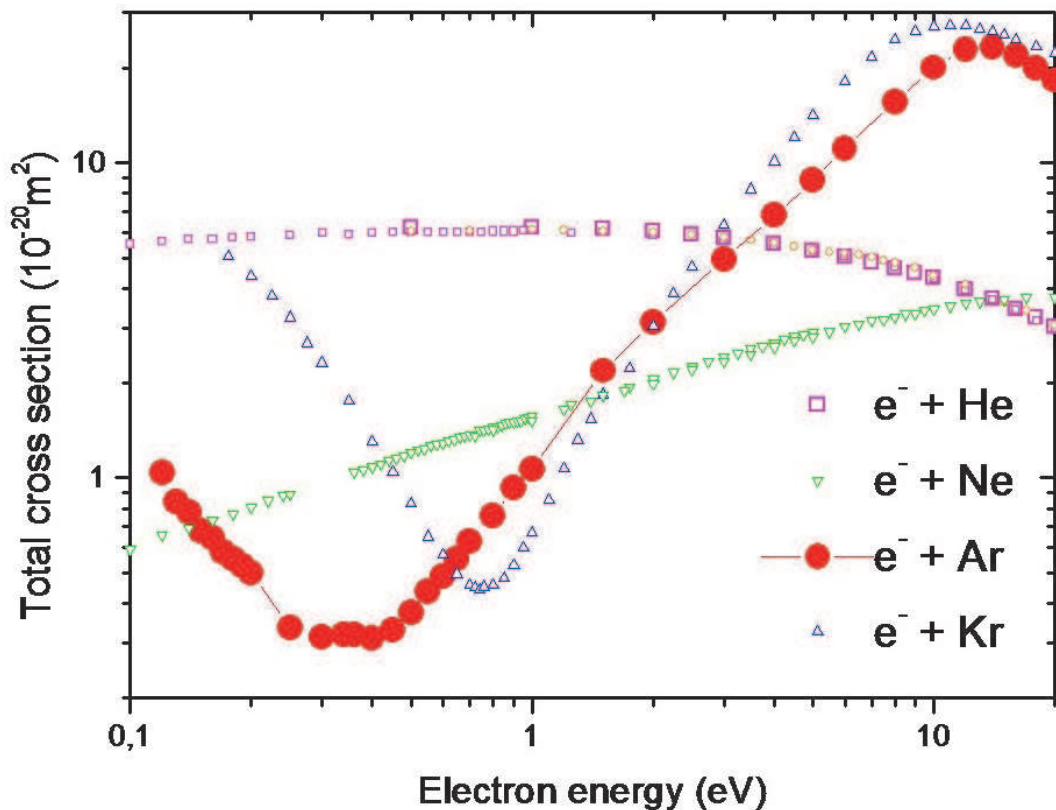
Fot. 2.24. Ugięcie wiązki światła z lasera na łepku szpilki (foto KS, AK) i fal na wodzie (foto MK)

Lasery pozwalają nam bez trudu zaobserwować naturę falową światła. Ba! w laserowej rurze (lub mini-strukturze w półprzewodniku) światło propagujące w lewo i w prawo również nakłada się, tworząc falę stojącą.

Hipoteza Plancka, odkrycie efektu fotoelektrycznego i jego wyjaśnienie przez A. Einsteina za pomocą pojęcia fotonów zwróciły uwagę, że światło może być również traktowane jako cząstki, tak jak to uważał I. Newton. A może więc i elektron jest (a raczej zachowuje się) jak fala? Pierwszym, przypuszczalnie doświadczeniem pokazującym, że elektron zachowuje się jak fala, były pomiary przeprowadzone w 1920 roku przez Carla Ramsauera na Politechnice

³⁵ Tak właśnie działa siatka dyfrakcyjna: każda z rys ugina falę a określony kolor tworzy jasną plamkę tylko tam, gdzie poszczególne fale ugięte sumują się.

w Gdańsku. Badając przechodzenie elektronów o niskich energiach (do kilku eV) przez gazy szlachetne, jak hel, neon, argon zauważył on, że „przezroczystość” argonu maleje wraz ze zmniejszaniem się energii elektronów poniżej 1 eV, zob. rys. 2.25.



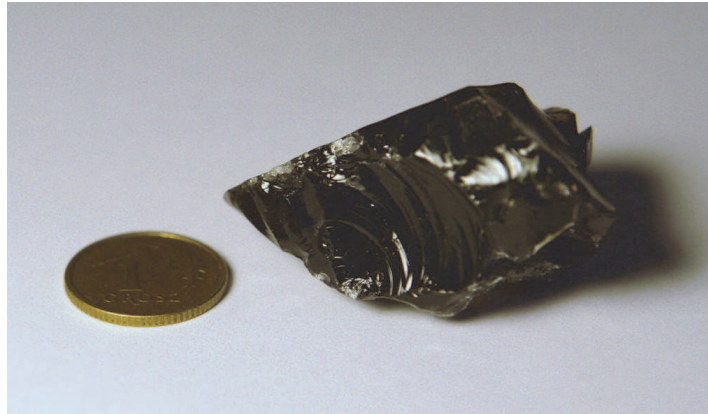
Rys 2.25. Całkowite przekroje czynne na rozpraszanie elektronów w gazach szlachetnych (analizy³⁶ i pomiary autora na Politechnice Gdańskiej); w helu przekrój czynny maleje ze wzrostem energii elektronów, tak jak się tego można spodziewać z fizyki klasycznej; w argonie około energii 0,3-0,5 eV (i kryptonie około 0.7-0.8 eV) przekrój czynny ma głębokie minimum - gaz staje się dla elektronów przezroczysty; efekt ten, odkryty na Politechnice w Gdańsku przez C. Ramsauera ma zasadnicze znaczenie dla kwantowego obrazu świata.

Był to wynik zaskakujący. Jeżeli traktować elektrony jako cząstki, to prawdopodobieństwo ich transmisji przez określoną grubość warstwy gazu powinna rosnąć wraz ze wzrostem energii, tak jak kula karabinowa przechodzi przez grubszą warstwę materiału jeżeli jej energia rośnie. Tymczasem argon stawał się prawie zupełnie przezroczysty dla elektronów dla energii około 0.3 eV. To tak jakby czarownica przeszła przez twardą ścianę.

To, że ośrodki materialne stają się przezroczyste jest domeną fal. Szkło (czyli tlenek krzemu) jest przezroczyste dla fal elektromagnetycznych w zakresie widzialnym, ale staje się nieprzezroczyste dla światła podczerwonego³⁷. Zupełnie inaczej zachowuje się krzem. Jest on nieprzezroczysty dla światła widzialnego (szary, metaliczny, zob. fot. 2.26), a przezroczysty dla podczerwieni. Dzięki temu nie grzeją się układy półprzewodnikowe w komputerze lub telefonie komórkowym – część ciepła ucieka w postaci promieniowania podczerwonego.

³⁶ G. Karwasz, Rozprawa habilitacyjna, UMK, 1997.

³⁷ Stąd efekt szklarni: energia światła widzialnego trafia do szklarni natomiast światło podczerwone ze szklarni nie może wyjść; temperatura w szklarni w dzień i nawet przy braku słońca jest wyższa niż na zewnątrz.



Fot. 2.26. Krzem, szary i połyskujący metalicznie, jest nieprzezroczysty w świetle widzialnym.

Jeżeli argon staje się przezroczysty dla elektronów o niskich energiach, to muszą się one zachowywać jak fala. Nie wiadomo, czy Luis de Broglie, historyk z wykształcenia, piszący w 1921 roku pracę doktorską z fizyki znał wynik Ramsauera. Faktem jest, że ten młody wówczas arystokrata sformułował śmiałą hipotezę: elektronom można przypisać określoną długość fali. Oto zarys rozumowania, które pozwala przypisać długość fali lecącym z określoną prędkością elektronom [nieobowiązkowe].

Ze szczególnej teorii względności Einsteina znamy związek między masą a energią dowolnego obiektu

$$E = mc^2 \quad (2.40)$$

gdzie m jest masą ciała a c prędkością światła.

Z drugiej strony wiemy, że energię fotonów możemy wyznaczyć z hipotezy Plancka jak

$$E = h\nu \quad (2.41)$$

Fotony, formalnie nie mają masy w spoczynku, ale można im przypisać pęd. Pęd fotonu to

$$p = mc \quad (2.42)$$

Możemy więc zapisać, że

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (2.43)$$

Z kolei między częstotliwością a długością fali zachodzi związek $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Skąd równanie 2.42 przyjmuje postać

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (2.44)$$

Jest to bardzo ważny wzór, nie tylko dla światła.

Elektron o masie m poruszający się z prędkością v niesie pęd:

$$p = mv \quad (2.45)$$

Jeżeli przyrównamy wyrażenie 2.43 i 2.44 otrzymujemy

$$mv = \frac{h}{\lambda} \quad (2.46)$$

stąd

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (2.47)$$

Przypomnijmy postulat Bohra dla momentu pędu, równanie (2.26)

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad (2.48)$$

i przekształcając zapiszmy go jako

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} \quad (2.49)$$

a korzystając z 2.47 dostajemy kolejny bardzo ważny wzór, równoważny postulatowi Bohra

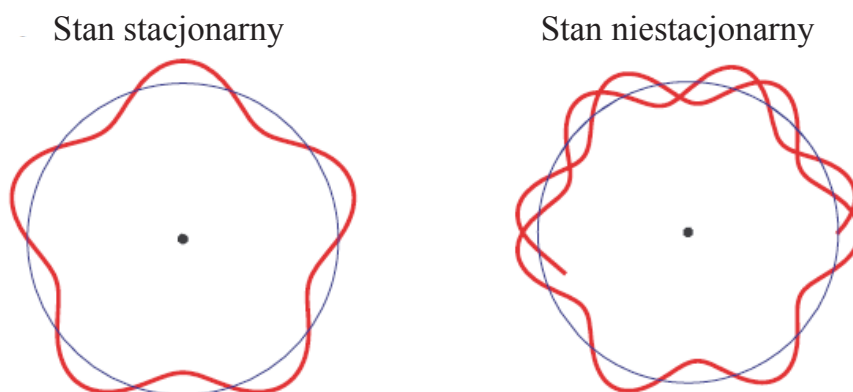
$$2\pi r = n \lambda \quad (2.50)$$

Lewa strona równania jest obwodem n -tej orbity, a λ jest długością fali elektronu na tej orbicie.

Zapamiętajmy ten wynik:

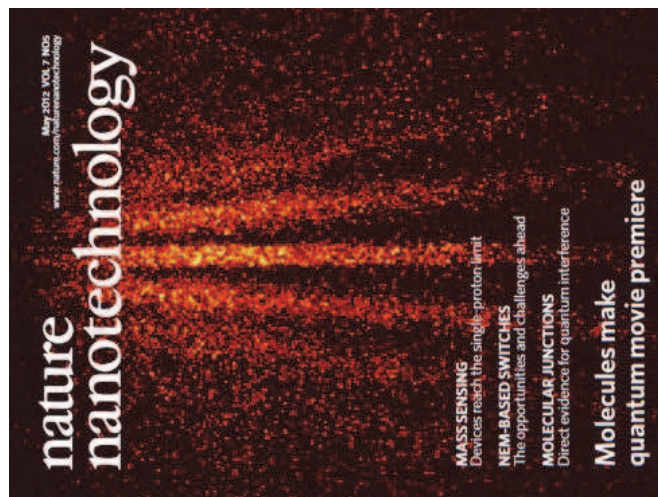
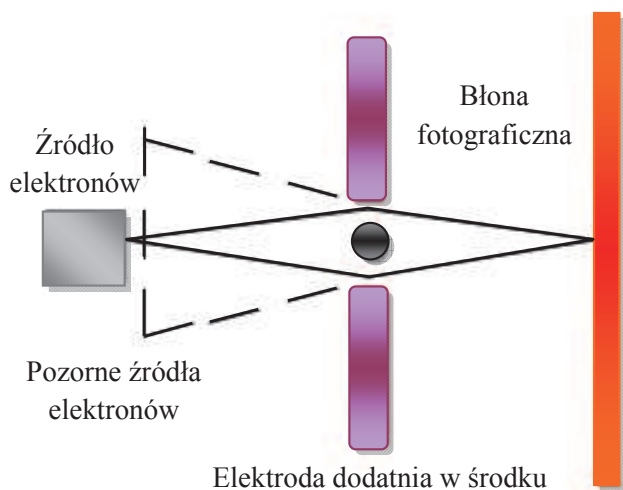
W atomie Bohra tylko takie orbity są dozwolone, na których mieści się (całkowita) wielokrotność fali de Broglie'a elektronu.

Potraktowanie elektronu jako fali de Broglie'a pozwoliło nam wyjaśnić nie do końca zrozumiały II postulat Bohra. Falę elektronu na orbicie stacjonarnej (i nieistniejącej niestacjonarnej) przedstawiamy na rys. 2.27.



Rys. 2.27. Fala de Broglie'a na stacjonarnej i niestacjonarnej (a przez to nieistniejącej) orbicie Bohra w atomie wodoru.

Jeżeli elektron jest falą, to powinniśmy obserwować efekty falowe w jego ruchu, czyli np. interferencję. W doświadczeniu elektrony emitowane z żarzonej katody rozdzielają się na dwie wiązki, przechodzą przez ograniczające je szczeliny i ponownie spotykają się na ekranie. Doświadczenie dla elektronów nie jest trudne, można je, z odpowiednim wyposażeniem, przeprowadzić w szkole. Im większa masa cząstki, tym trudniej zobaczyć obraz interferencyjny. Przeprowadzono takie doświadczenie z jonami helu a dopiero zupełnie niedawno (w maju 2012) z dużymi cząsteczkami organicznymi, ftalocyjaniny.



Rys. 2.28. a) Schemat układu do obserwacji interferencji elektronów (lub atomów) pochodzących z dwóch pozornych źródeł elektronów; **b)** prążki obserwowane w interferencji drobin ftalocyaniny (Uniwersytet w Wiedniu, 2012, na zdjęciu okładka czasopisma „Nature”)

Jak widać ze zdjęcia 2.28, na ekranie pojawiają się jasne i ciemne prążki, jak w doświadczeniu z interferencją światła (historycznie, w doświadczeniu Younga z 1805 r.). Dziwne pozostaje, że nawet gdy elektrony (lub jony) przechodzą przez jedną lub drugą szczelinę nie w postaci wiązki, ale pojedynczych cząstek, obraz na ekranie jest obrazem interferencyjnym. To tak, jakby kolejny elektron (atom) „wiedział”, przez którą szczelinę przeszedł poprzedni tak, aby powstał obraz interferencyjny. Powrócimy do tego zagadnienia.

Zadanie 1

Znaleźć długość fali de Broglie’a piłki ping-pongowej (masa $m = 10$ g) lecącej z prędkością $v = 108$ km/h.

Dane

$$m = 0,01 \text{ kg}$$

$$v = 30 \text{ m/s}$$

$$h = 6,67 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Szukane: λ

Korzystamy ze wzoru

$$\lambda = h/mv$$

$$\text{Podstawiając dane liczbowe dostajemy } \lambda = \frac{6,67 \cdot 10^{-34}}{0,01 \cdot 30} \approx 20 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

Ponieważ piłeczka ping-pongowa ma rozmiary kilku centymetrów, fala de Broglie’a różni się o kilkadziesiąt rzędów wielkości od tych rozmiarów. Piłkę ping-pongową też można opisać za pomocą fali de Broglie’a, ale ma ona tak krótką długość, że ztraca sens fizyczny. Dopiero w świecie obiektów bardzo lekkich (jak elektron o masie $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg) i małych (tzw. klasyczny promień elektronu wynosi 10^{-15} m) fala de Broglie’a staje się porównywalna z rozmiarami obiektów.

Zadanie 2

Oblicz, ile wynosi długość fali de Broglie’a elektronu o energii $0,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ J (czyli 0,3 eV). Masa elektronu wynosi $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Dane:

$$E = 0,48 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Obliczyć: λ

Rozwiązanie:

Obliczmy pęd elektronu, korzystając z energii.

Energia kinetyczna wyraża się wzorem:
$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

Jeżeli pomnożymy obie strony tego równania przez $2m$ to uzyskamy:

$$2mE = m^2v^2 = p^2$$

Pęd elektronu wynosi więc $p = \sqrt{2mE}$

Korzystając z jednostek SI otrzymujemy $p = 2,96 \cdot 10^{-25} \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Długość fali de Broglie'a wynosi $\lambda = h/mv = 2,24 \cdot 10^{-9} \text{ [m]}$

Jak widać, długość fali jest tego samego rzędu co „rozmiary” atomu argonu. Efekt Ramsauera możemy więc uznać, w przybliżeniu, za skutek interferencji elektronu, samego ze sobą, wewnątrz atomu argonu. I do tego zagadnienia jeszcze wrócimy.

2.8. Równanie Schrödingera i zasada Heisenberga

W 1926 roku fizyka znalazła się w dość dziwnej sytuacji – okazało się, że elektron jest falą, ale nieznanym było równanie opisujące taką falę. Dokładnie na odwrót niż to było z falami Maxwella – gdzie najpierw pojawiło się równanie a dopiero później wywnioskowano o istnieniu fal.

Odmienność równania opisującego ruch elektronu od równania opisującego falę elektromagnetyczną polega na tym, że prędkość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni nie zależy od ich długości³⁸, natomiast elektrony mogą się rozchodzić z dowolnymi prędkościami.

Równanie takie zaproponował w 1926 roku Erwin Schrödinger. Podajemy je poniżej, ale nie będziemy zagłębiać się w szczegółowy opis tego równania.

$$\hat{H} \Psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r,t) \quad (2.51)$$

Interpretacja równania Schrödingera jest podobna jak innych równań opisujących fale. W równaniu fali akustycznej, kwadrat amplitudy fali opisuje natężenie dźwięku (moc fali); w równaniu fali elektromagnetycznej kwadrat amplitudy fali (np. pola elektrycznego) opisuje moc padającego światła. W równaniu Schrödingera kwadrat amplitudy fali określa prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w określonym miejscu i w określonym czasie.

Zwracamy uwagę, że powyższa interpretacja jest dokładnie taka jak stwierdziliśmy³⁹. Błędem byłoby stwierdzenie „Równanie Schrödingera opisuje elektron” lub „Równanie Schrödingera opisuje ruch elektronu” – są to tzw. „skrótowe myślowe”.

³⁸ Przypominamy, że w innych ośrodkach niż próżnia, np. w wodzie, prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej zależy od długości fali, czyli koloru światła. Bez tej zależności nie byłoby tęczy.

³⁹ Zaznaczmy jednak, że zagadnieniom interpretacji mechaniki kwantowej poświęcanych jest tysiące artykułów naukowych każdego roku.