Inclusione e personalizzazione nell'insegnamento delle STEAM

Lezione 9: Individualizzazione
Parte II: Sistemi di equazioni di primo grado

Grzegorz Karwasz
Professor in Experimental Physics

- Facoltà di Fisica, Astronomia e Informatica Applicata, Universita' Nicolao Copernico, Torun, Polonia

karwasz@fizyka.umk.pl

Didattica tradizionale vs didattica cognitivista

- Nella didattica tradizionale l’insegnante *trasmette* questo che lui/lei sa
- Il programma in vigore (cv) definisce i contenuti che *bisogna* trasmettere
- Nella didattica programmata l’insegnante dovrebbe determinare i contenuti da *far assorbire* dall’alunno
- Nelle didattica cognitivista la trasmissione viene sostituita da un processo di scoperta individuale, pur guidata dall’insegnante

Domanda di lavoro:

- Come insegnare (nella classe II del liceo scientifico) il metodo di Cramer per risolvere
- Domanda di aiuto: ma studenti/ insegnanti sono convinti sull’utilità delle equazioni lineari e del metodo Cramer in particolare?
- Sappiamo dare qualche esempio di applicazioni «palpabili» di sistemi di equazioni di primo grado?

La strategia:

- Far vedere gli «utilizzi» delle equazioni lineari seguendo il principio didattico della *difficoltà crescente*
- In didattica cognitivista/ personalizzata si tratta di fare un percorso cognitivo insieme, fermandosi per affermare i punti «fissi»
- «Personalizzare» vuol dire proporre anche qualcosa sostituivo – meno formale e più divertente
- Il ragionamento vuol dire applicare determinate operazioni mentali (esemplificare, indovinare, dedurre, generalizzare) – queste considerazioni si chiamano *meta-cognizione*

Leggere il coreano: indovinare/ decifrare/ trovare la chiave d'accesso

Song Miyoung ×

송미영
songmiyeong

Gunsan ×

군산
gunsan

ㄴ	n
ㅇ	ng
ㅅ	s

Imparare russo?

Attention-catching story:
Lo zar era molto severo, e il povero tipografo – analfabeta
Dalla paura inciampò sulla soglia della stanza, e…

В = V Г = G Е = IE

И = I З = E Λ = L

Н = N Р = R С = S У = U

Ц = C(Z) Ш = SC

Ю = IU Я = IA

Operazioni dell'algebra:
sostituzioni, **inversioni**, **diatoni** (nihil novae sub sole…)

https://m.facebook.com/interdialog/photos/alfabeto-russo-guida-pratica-alluso-e-se-la-nostra-guida-non-fosse-sufficiente-h/310561266395070/

Indovinello per bambini

Abbiamo due numeri:

(1) la somma di questi numeri è pari a 10

(2) la differenza di questi numeri è pari a 2

- Quali sono questi numeri?

… … Sì!

Ma come l'avete fatto?

Indovinato? Provato? Sostituito? Invertito? Memorizzato? Usato schemi pronti? Oppure: «lo sapevamo, e basta!»

[L'analisi metodologica si chiama la *metacognizione*]

USA: no student left behind

S. Goldman (1999): teaching that includes active involvement of pupils, previously reserved only for selected schools, become available to all.

Indovinello per bambini

Abbiamo due numeri:

(1) il triplo del primo numero più il secondo numero fa 18

(2) il triplo del secondo numero più il primo numero fa 22

- Quali sono questi numeri?

Soluzione «d'ordine» zero: il numeri non sono grandi, visto che circa il quattro volte il loro valore non supera 22

- Ipotesi: se uno di loro ammonta a 4, quanto vale l'altro?

- Usiamo la condizione (1): il primo numero vale 18 – (3x4) = 6
- Controlliamo la condizione (2): (3 x 6) + 4 = 22

OK! Congratulazioni!

In pratica, abbiamo risolto un sistema di due condizioni (equazioni),

ma in modo che si sarebbe fatto ancora nel XIV secolo, i.e. prima della introduzione delle incognite x e y

Oggi le due condizioni si possono scrivere come

(1) $3x + y = 18$

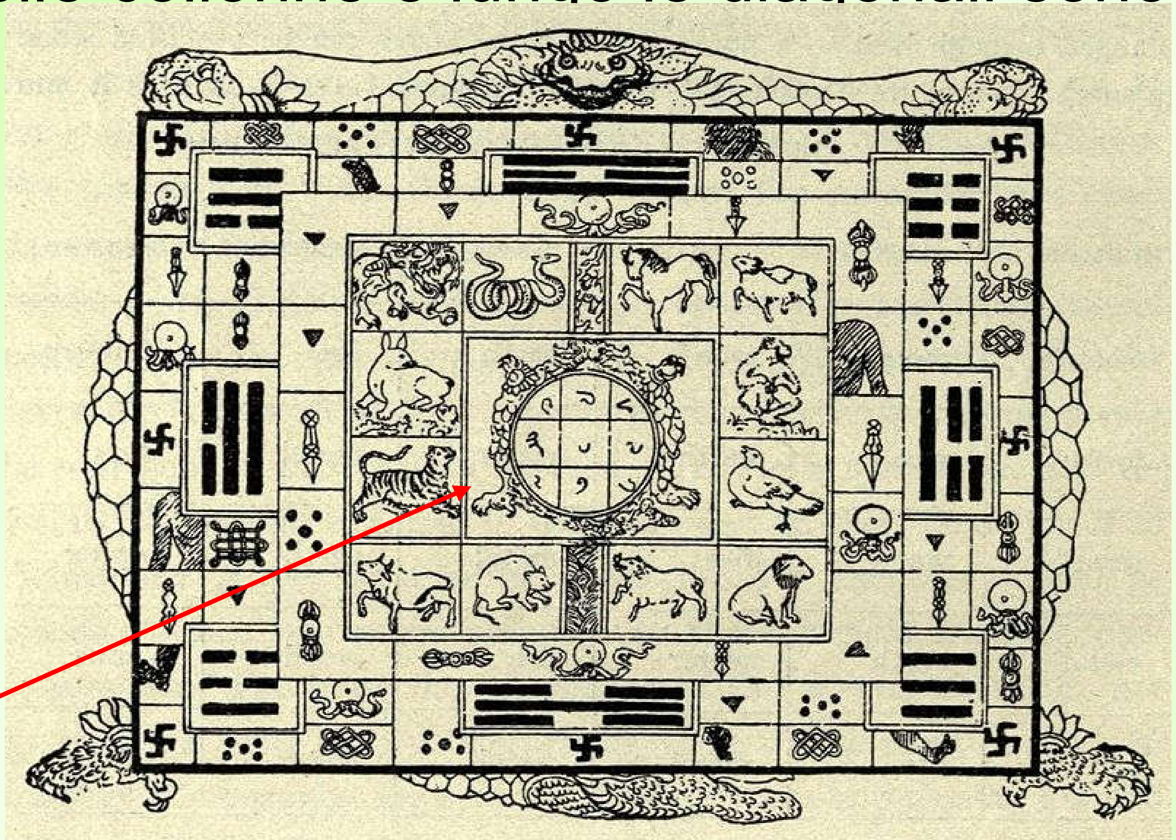
(2) $x + 3y = 22$

Ma questo modo di descrivere il problema cambia poco: ancora on sappiamo come trovare i due numeri

In caso generale, *indovinare a caso* non è molto efficace.

„Matematica per cittadini”

Quadrato magico (Cina, IV secolo AC: le somme nelle righe, nelle collonne e lungo le diagonali sono identiche



THE MYSTIC TABLET.[13]

Barozzi, Bergamini, Boni, Cerani, Pagani, *La matematica per il cittadini,* Zanichelli, Bologna, 2008, str. 12

English: The "Mystic Tablet". According to Carus' explanation, it contains, on the shield of a tortoise (alluding to the animal that has revealed the *Eight Trigrams* to Fu Xi, and which was, in more canonical accounts, a "dragon horse") a chart with the 8 Trigrams, the 12 figures of Chinese animal cycle, etc. The centerpiece is another, smaller, tortoise, the one that revealed the *Luoshu* magic square to Yu the Great. https://en.wikipedia.org/wiki/Lo_Shu_Square#/media/File:Carus-p48-Mystic-table.jpg

Quadrato magico

Lo Shu: usa tutte le cifre, da 1 a 9 e la somma è eguale a 15

	5	

4	5	6

=15

Il primo tentativo

7		
4	5	6
4		

8		
4	5	6
3		2

8		7
4	5	6
3		2

8	0	7
4	5	6
3	10	2

quasi bene…

Quadrato magico

secondo tentativo

	5	

3	5	7

=15

4		
3	5	7
8		6

4		2
3	5	7
8		6

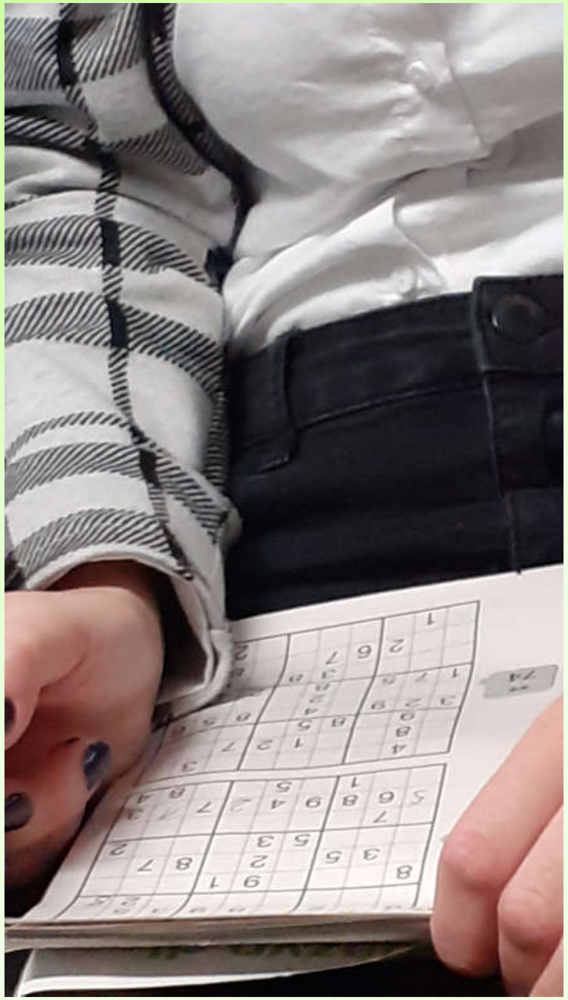
4	9	2
3	5	7
8	1	6

=15

8	1	6
3	5	7
4	9	2

anche questo bene…

Oggi si chiama sudoku



ed è fenomeno sociale

8		
	3	5

	9	1
8	2	
5	3	

che non possiamo ignorare…

Operazioni di simetria

Le colonne/ righe si possono *permutare*

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

+1

5	10	3
4	6	8
9	2	7

=18

L’intera tavoletta si può ruotare oppure riflettere

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

La matematica: il regno di simboli

a	b	c
d	5	e
f	g	h

a + b + c = 15
d + e = 10
f + g + h = 10
a + d + f = 15
b + g =10
c + e + h = 15
a + h = 10
c + f = 10

8 equazioni, 9 incognite
→ il sistema di equazioni ha più di una soluzione

La soluzione generale produce la condizione che la somma di «controllo» deve essere uguale a 3*k*, che *k* è il numero nella cella centrale.

Barozzi, Bergamini, Boni, Cerani, Pagani, *La matematica per il cittadino,* Zanichelli, Bologna, 2008, str. 12

Proviamo di applicare le operazioni che hanno funzionato per il quadrato magico

- Si possono aggiungere i numeri (gli stessi) alle righe
- Si possono anche moltiplicare le righe per gli stessi numeri

(1) $3x + y = 18$

(2) $x + 3y = 22$

Allora proviamo (improvvisando un po') che (1) equivale a

(1) $9x + 3y = 54$

(2) $x + 3y = 22$

Facciamo adesso un'altra operazione, un po' «azzardata»:

la differenza tra le due equazioni. Si ottiene:

$8x = 54 – 22 = 32$

Da qui è chiaro che $x = 4$

Ma ancora la percentuale di «improvvisare» e «indovinare»

rimane ancora alta

Ci sarebbe un modo più «regolare» di risolvere questo problema (1)

(1) $3x + y = 18$

(2) $x + 3y = 22$

Dalla equazione (1) possiamo ottenere $y = 18 - 3x$ (una operazione simile a quelle che si fa su un abaco)

E poi inserire questo valore nella seconda equazione, ottenendo

(2) $x + 3(18 - 3x) = x + 54 - 9x = 22$

Dobbiamo raggruppare i termini

$-8x = 22 - 54 = -32$

cioè $x = 8$

È andata bene, anche se per il momento avevamo i numeri negativi.

Tutto sommato, per risolvere il nostro quadrato

a	b	c
d	5	e
f	g	h

$a + b + c = 15$
$d + e = 10$
$f + g + h = 10$
$a + d + f = 15$
$b + g = 10$
$c + e + h = 15$
$a + h = 10$
$c + f = 10$

8 equazioni, 9 incognite
→ il sistema di equazioni ha più di una soluzione

i metodi proposti sembrano *senza speranza*
Ci vuole qualche metodo più generale.
Fu inventato da Cramer (1750)

Cosa dicono i libri?

2. Sistemi lineari di due equazioni in due incognite

Forma normale di un sistema lineare di due equazioni in due incognite

Un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y si dice si dice **ridotto in forma normale** (o **canonica**) se è scritto nella forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

con a o b diversi da 0 e a' o b' diversi da 0.

Riduciamo in forma normale il sistema $\begin{cases} 7x - 3y - 7 = 4x + y + 3 \\ x(3x - 6y - 2) = (x - 2y)(3x - 1) \end{cases}$

Eseguendo i calcoli in entrambe le equazioni, trasportando i termini con le incognite al primo membro e i termini noti al secondo membro, si ha:

$$\begin{cases} 7x - 3y - 4x - y = 7 + 3 \\ 3x^2 - 6xy - 2x = 3x^2 - x - 6xy + 2y \Rightarrow -2x + x - 2y = 0 \Rightarrow -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

DeAgostini, Colori della matematica
edizione BIANCA - Algebra 2, p.141

Cosa dicono i libri?

Esercizi p. 152

3. Metodi risolutivi di un sistema lineare di due equazioni in due incognite

Una volta ridotto in forma normale, un sistema lineare di due equazioni in due incognite (che indicheremo con x e y) può essere risolto con uno dei metodi illustrati qui di seguito.

Metodo di sostituzione

▶ Passo 1 Si risolve una delle due equazioni rispetto a una delle due incognite, per esempio x (o y), scegliendo l'equazione e l'incognita in modo da essere ricondotti ai calcoli più semplici possibili.

▶ Passo 2 Si sostituisce nell'altra equazione l'espressione trovata al posto di x (o y); si ottiene così un'equazione nell'altra incognita y (o x), detta **equazione risolvente** del sistema.

▶ Passo 3 Si risolve l'equazione risolvente.

▶ Passo 4 Si sostituisce il valore trovato per y (o x) al Passo 3 nell'equazione esplicita ricavata al Passo 1 e si ricava, così, il valore dell'incognita x (o y) ancora da determinare.

▶ Passo 5 Si conclude scrivendo la soluzione del sistema.

OSSERVA

Se l'equazione risolvente è:

- determinata, il sistema è determinato;
- indeterminata, il sistema è indeterminato;
- impossibile, il sistema è impossibile.

Parole «riservate» che sembrano tautologie

a. Risolviamo il sistema $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$

▶ Passo 1 La scelta più conveniente è risolvere la prima equazione rispetto a x, perché si ottiene un'espressione priva di denominatori, quindi più *semplice*:

$$\begin{cases} x = 3y + 7 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

Tutto bene, finché le incognite sono solo due

Metodo del confronto

▶ **Passo 1** Si risolvono entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita, per esempio x (o y).

▶ **Passo 2** Si uguagliano le espressioni al 2° membro delle due equazioni ottenute al Passo 1; si ottiene così l'**equazione risolvente** del sistema nell'incognita y (o x).

▶ **Passo 3** Si risolve l'equazione risolvente e si conclude poi la risoluzione del sistema come nel metodo di sostituzione.

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

▶ **Passo 1** Risolviamo ciascuna equazione rispetto a una delle due incognite, per esempio x:

$$\begin{cases} 3x = -1 - 5y \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-1 - 5y}{3} \\ 2x = 12 + 3y \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{12 + 3y}{2} \end{cases}$$

▶ **Passo 2** Uguagliando le espressioni al secondo membro delle equazioni precedenti, otteniamo l'equazione risolvente:

$$\frac{-1 - 5y}{3} = \frac{12 + 3y}{2}$$

Problemi nascono già con tre incognite

5. Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Forma normale e soluzioni di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

Un sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z si dice **ridotto in forma normale** (o **canonica**) se è scritto nella forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

con a o b o c diversi da 0, a' o b' o c' diversi da 0, a'' o b'' o c'' diversi da 0

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

è un sistema di tre equazioni in tre incognite ridotto in forma normale

Risoluzione di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

Una volta ridotto in forma normale, un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (che indicheremo con x, y e z) può essere risolto utilizzando ancora il metodo di sostituzione o il metodo di addizione e sottrazione.

Poi, un po' all'improvviso compare

Metodo di Cramer per un sistema lineare di due equazioni

Dato un sistema lineare della forma $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, in cui almeno uno dei quattro coefficienti a, b, a', b' sia diverso da zero, e definiti i tre determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b, \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

vale il seguente Teorema di Cramer:

- se $D \neq 0$, il sistema è determinato e ha come soluzione: $x = \dfrac{D_x}{D}$ e $y = \dfrac{D_y}{D}$;
- se $D = 0$ e, inoltre, $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, il sistema è impossibile;
- se $D = D_x = D_y = 0$, il sistema è indeterminato.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 7$$

Calcola i tre determinanti associati al sistema

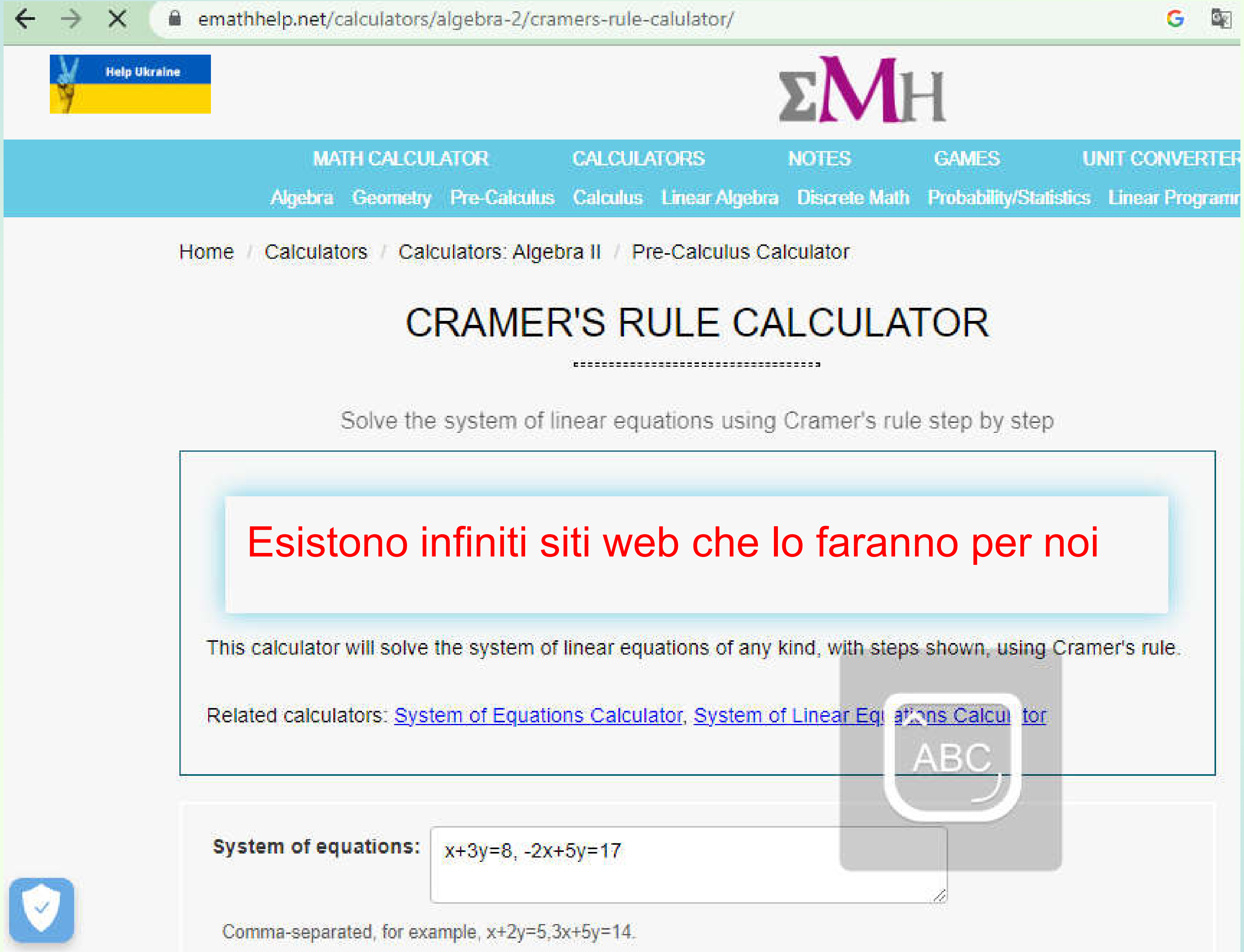
$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 14 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 2 \qquad y = \frac{D_y}{D} = 1$$

$D = 7$, quindi il sistema è determinato. Calcola le soluzioni del sistema con le formule del teorema

O Dio! Cosa dobbiamo fare?

In primo luogo non stressarsi (e non stressare i ragazzi)



Esistono infiniti siti web che lo faranno per noi

Poi, tolto lo stress possiamo cominciare a ragionare

Abbiamo un sistema di due equazioni lineari (di primo grado)

(1) $3x + y = 18$ $\qquad\qquad a_1 x + b_1 y = c_1$

(2) $x + 3y = 22$ $\qquad\qquad a_2 x + b_2 y = c_2$

In un sistema c'è sempre qualche *x* e qualche *y.*
Allora non ha senso riportali nei calcoli.
Questo che conta sono i coefficienti numerici.
In primo luogo, i coefficienti *determinanti* per la soluzione quelli che stanno con *x* e *y*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$ [abbiamo moltiplicato «le diagonali»]

La matematica consiste nell'astrazione (cioè l'eliminazione di dettagli non essenziali)

Possiamo tenere solo i simboli, piuttosto che le cifre

(1) $a_1 x + b_1 y = c_1$

(2) $a_2 x + b_2 y = c_2$

Abbiamo già definito un *determinante* (dell'equazione)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Scriviamo in modo analogo [mantenendo l'ordine $ab\cancel{c}$, $c\cancel{a}b$, $a\cancel{b}c$]

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \quad \text{e} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

e, adesso, magia, magia!

Possiamo tenere solo i simboli, piuttosto che le cifre

$x = D_x / D$

$y = D_y / D$

Quasi, quasi, troppo bello per essere vero. Verifichiamolo

$3x + y = 18$

$x + 3y = 22$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8$$

Scriviamo in modo analogo

$$D_x = \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 22 & 3 \end{vmatrix} = 54 - 22 = 32 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 66 - 18 = 48$$

Adesso, magia, magia, $x = 32 / 8 = 4$ $\qquad$ $y = 48 / 8 = 6$

Il metodo è facilmente applicabile anche ai sistemi di più equazioni

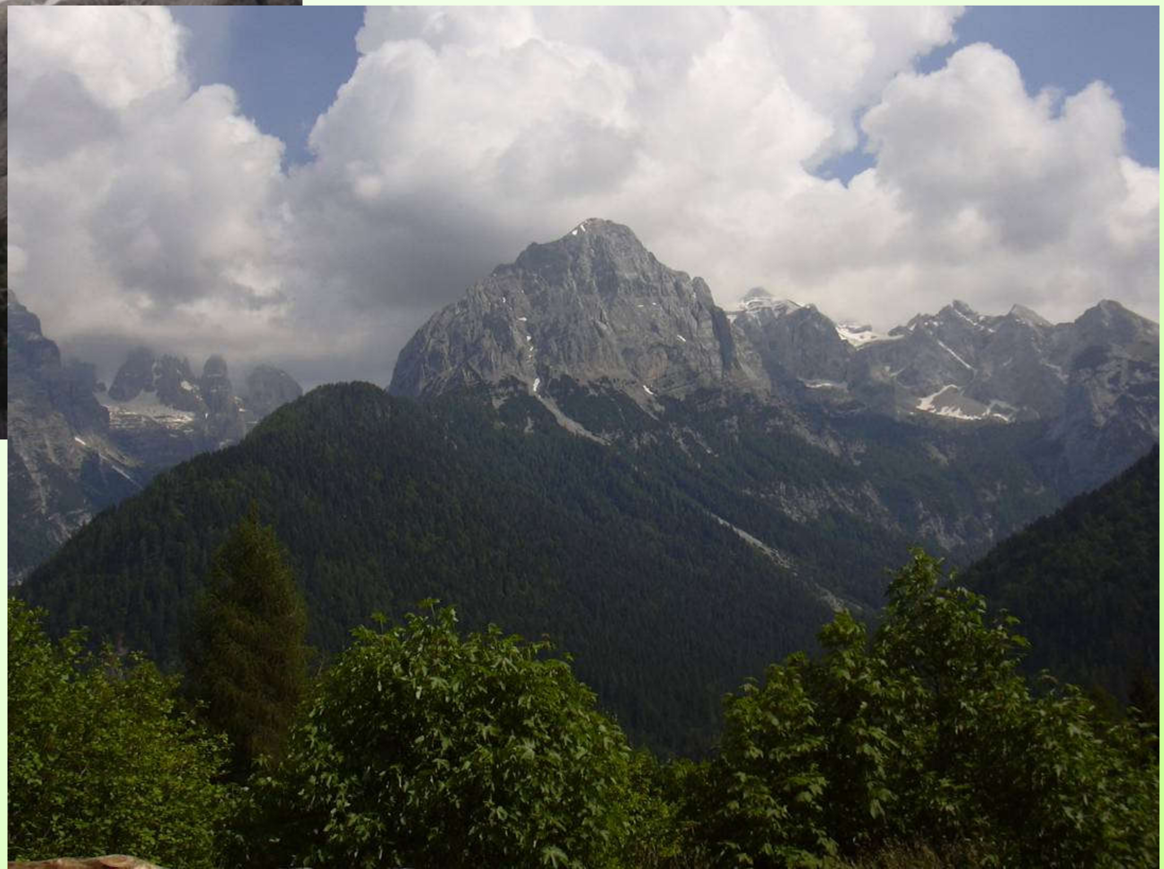
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - \ldots.$$

Il resto si trova nei libri di matematica – al liceo o universitari

Chiedo scusa per aver superato i limiti di pazienza di «non addetti ai lavori»

Un’altra veduta di Marmolada (TN)



Ancora un passo verso la generalizzazione del problema

Nel sistema do equazioni compaiono sia i coefficienti (i numeri) *a*, *b, c* etc. sia le variabili da trovare

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3
\end{aligned}
$$

Poi, le variabili *x, y, z* somigliano alle tre direzioni *X, Y,* Z*.*
E i valori determinati [*x*, *y*, *z*] costituiscono le coordinate di un vettore.
Un insieme di coefficienti

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}
$$

chiamiamo *matrice* ***A*** (come una tavoletta da stampare). Notate le parentesi quadre, a non le righe verticali (come nel calcolo del determinante *D*)

Le matrici (con i numeri e con i vettori) formano una *algebra*,

cioè sono soggette alle stesse operazioni (addizione, moltiplicazione) che i numeri nell'algebra «tradizionale»

La *somma* delle due matrici è banale; si sommano gli elementi nelle stesse posizioni (ovviamente, entrambe matrici devono essere delle stesse dimensioni)

Invece moltiplicare le matrici porta a risultati sorprendenti.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

dove, per pigrizia, abbiamo calcolato solo il primo elemento (1,1)
Quasi, quasi, meglio delegare questo lavoro a qualche sito web specializzato (tipo wolfram.com)

Applicazioni dell'algebra delle matrici sono infinite: econometria

Tabella 1. *Modello chiuso semplificato per un'economia a tre settori.*

a: *da:*	**Agricoltura**	**Industria**	**Famiglie**	**Totale**
Agricoltura	7,5	6	16,5	30 quintali di grano
Industria	14	6	30	50 metri di stoffa
Famiglie	80	180	40	300 anni-uomo di lavoro

Le righe della tabella mostrano gli output (le erogazioni):

- l'agricoltura produce 30 quintali di grano, di cui 7,5 consumati da se stessa (sementi), 6 dall'industria e 16,5 dalle famiglie (grano, carne, frutta, ecc.);
- l'industria produce 50 metri di stoffa, di cui 14 consumati dall'agricoltura e 6 da se stessa, 30 dalle famiglie;
- le famiglie forniscono in totale 300 anni-uomo (300 uomini impegnati nel lavoro tutto l'anno), di cui 80 all'agricoltura (contadini), 180 all'industria (operai) e 40 a se stesse (lavori domestici).

Le colonne mostrano gli input (le immissioni):

- l'agricoltura impiega 7,5 quintali di grano, 14 metri di stoffa e 80 anni-uomo per produrre 30 quintali di grano:
- l'industria impiega 6 quintali di grano, 6 metri di stoffa e 180 anni-uomo;
- le famiglie spendono i loro redditi da lavoro per acquistare 16,5 quintali di grano, 30 metri di stoffa e 40 anni-uomo di lavoro.

Deve esistere un sistema di prezzi che garantisca la possibilità effettiva degli scambi tra i diversi settori; nel caso della Tabella 1 i prezzi sono 20 euro per un quintale di grano, 15 euro per un metro di stoffa, 3 euro per un anno-uomo di lavoro. Si ottiene così la tabella dei valori:

https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_input-output

Queste tabelle conosciamo bene: sono le matrici

due sistemi di equazioni lineari:

$$(1)\quad \begin{cases} q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n} = q_1 \\ q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2n} = q_2 \\ \cdots \\ q_{n1} + q_{n2} + \cdots + q_{nn} = q_n \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \cdots + q_{n1}p_n = q_1 p_1 \\ q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \cdots + q_{n2}p_n = q_2 p_2 \\ \cdots \\ q_{1n}p_1 + q_{2n}p_2 + \cdots + q_{nn}p_n = q_n p_n \end{cases}$$

Dividendo ciascuna riga del secondo sistema per le quantità prodotte, si ottiene un nuovo sistema espresso in termini dei coefficienti tecnici di produzione:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{n1}p_n = p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{n2}p_n = p_2 \\ \cdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{nn}p_n = p_n \end{cases}$$

in forma matriciale: $A^T\vec{p} = \vec{p}$

ovvero:

$$(4)\quad \begin{cases} (a_{11} - 1)p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{n1}p_n = 0 \\ a_{12}p_1 + (a_{22} - 1)p_2 + \cdots + a_{n2}p_n = 0 \\ \cdots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + (a_{nn} - 1)p_n = 0 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$(A^T - I)\vec{p} = \vec{0}$$

dove A^T è la trasposta della matrice quadrata (a_{ij}) dei coefficienti tecnici di produzione e I è la matrice identità.

Applicazioni dell'algebra delle matrici sono infinite: lo stress meccanico

Cauchy stress tensor — Lo stress è multi-direzionale

From Wikipedia, the free encyclopedia

In continuum mechanics, the **Cauchy stress tensor** $\boldsymbol{\sigma}$, **true stress tensor**,[1] or simply called the **stress tensor** is a second order tensor named after Augustin-Louis Cauchy. The tensor consists of nine components σ_{ij} that completely define the state of stress at a point inside a material in the deformed state, placement, or configuration. The tensor relates a unit-length direction vector **e** to the traction vector $\mathbf{T}^{(\mathbf{e})}$ across an imaginary surface perpendicular to **e**:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{e})} = \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma} \quad \text{or} \quad T_j^{(\mathbf{e})} = \sigma_{ij} e_i,$$

or,

$$\begin{bmatrix} T_1^{(\mathbf{e})} & T_2^{(\mathbf{e})} & T_3^{(\mathbf{e})} \end{bmatrix} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

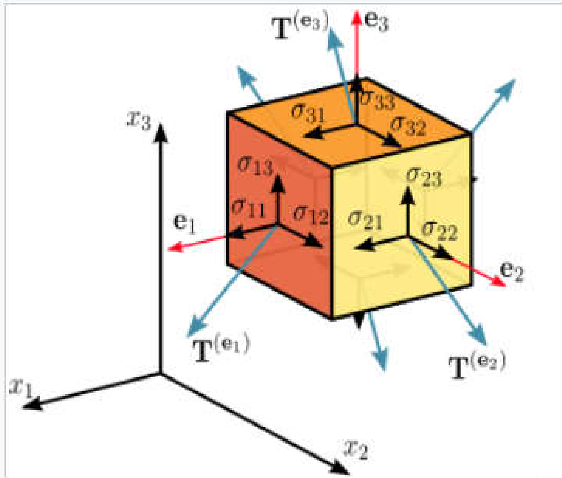


Figure 2.3 Components of stress in three dimensions

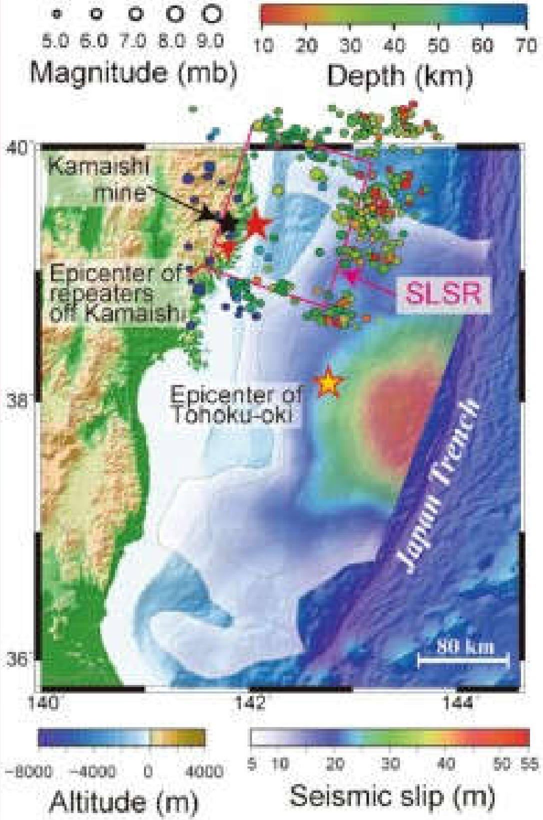
The SI units of both stress tensor and traction vector are N/m^2, corresponding to the stress scalar. The unit vector is dimensionless.

The Cauchy stress tensor obeys the tensor transformation law under a change in the system of coordinates. A graphical representation of this transformation law is the Mohr's circle for stress.

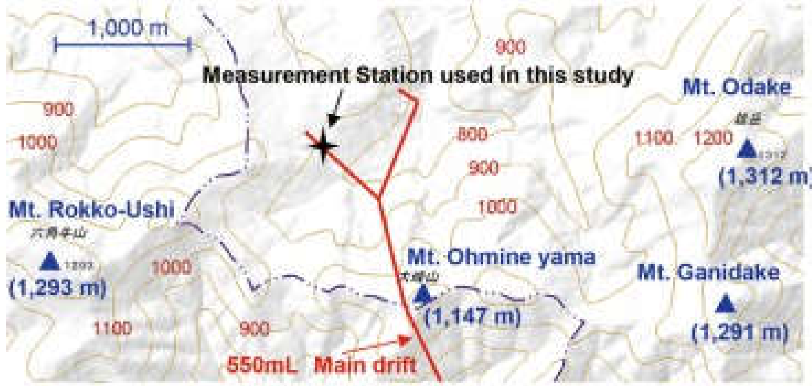
The Cauchy stress tensor is used for stress analysis of material bodies experiencing small deformations: It is a central concept in the linear theory of elasticity. For large deformations, also called finite deformations, other measures of stress are required, such as the Piola–Kirchhoff stress tensor, the Biot stress tensor, and the Kirchhoff stress tensor.

Stress delle placche tettoniche: terremoto di Tohuku (2011)

(a)

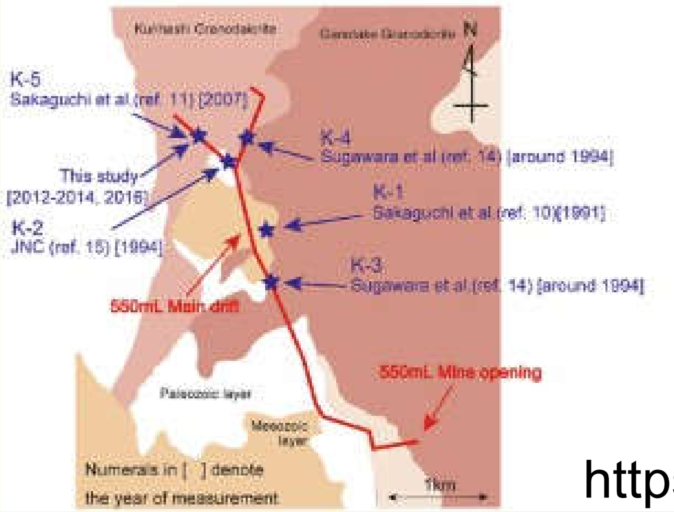


(b)

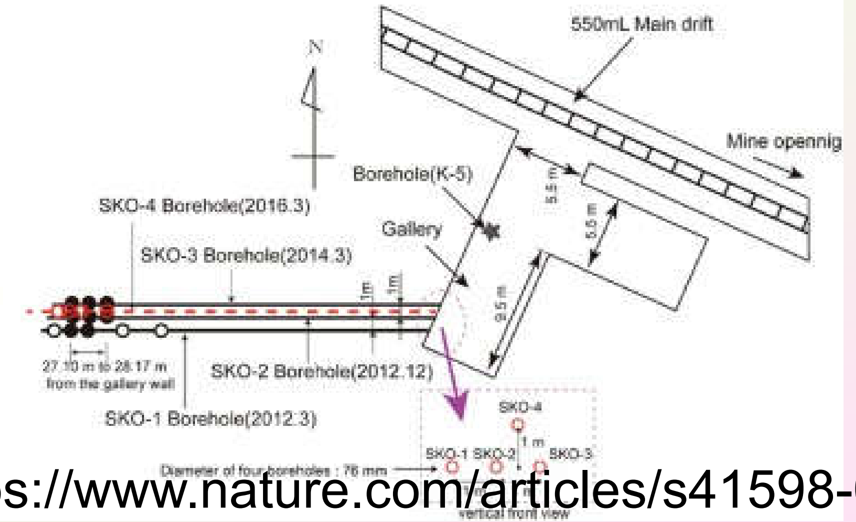


La causa di terremoti è l'accumulo dello stress. Possiamo prevedere il punto di terremoto, ma non possiamo prevedere il momento. Il terremoto di Tohuku (grado 9) accumulò lo stress di 800 anni.

(c)



(d)



https://www.nature.com/articles/s41598-017-10897-8

Teoria generale della relatività

Black hole metrics [edit]

The Schwarzschild metric describes an uncharged, non-rotating black hole. There are also metrics that des

Schwarzschild metric [edit]

Besides the flat space metric the most important metric in general relativity is the Schwarzschild metric whi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

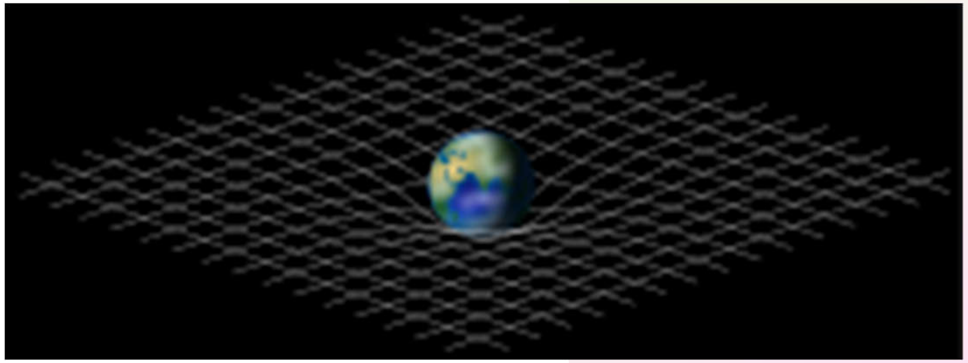
where, again, $d\Omega^2$ is the standard metric on the 2-sphere. Here, G is the gravitation constant and M is a c
can be found here. The Schwarzschild metric approaches the Minkowski metric as M approaches zero (ex
when r goes to infinity, the Schwarzschild metric approaches the Minkowski metric.

With coordinates

$$\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, r, \theta, \varphi),$$

we can write the metric as

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$



La metrica dello spazio-tempo

Several other systems of coordinates have been devised for the Schwarzschild metric: Eddington–Finkelst
Kruskal–Szekeres coordinates, and Lemaître coordinates.

Dopo questo tuffo torniamo alla «normalità»

Rivediamo il nostro problema elementare

Abbiamo due numeri:

(1) La somma del primo numero con il secondo fa 10

(2) il triplo del secondo numero più il triplo del primo numero fa 30

- Che ve ne pare?

È un po' scemo questo professore?

Qualsiasi paio di numeri, 4 e 6, 3 e 7, 2.5 e 7.5 soddisfano le entrambe condizioni.

Vediamo cose dice Cramer

Scriviamo il sistema di equazioni

(1) $x + y = 10$

(2) $3x + 3y = 30$

Calcoliamo il determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$$ e visto che $x = D_x/D$, diventa «rischioso» calcolare x almeno che anche $D_x = 0$

Controlliamo $D_x = 30 - 30 = 0$

E visto che 0/0 = qualsiasi numero, il sistema come sopra ha il numero infinito delle coppie di soluzioni, come abbiamo già visto (anche nel libro di testo)

Torniamo per la terza volta

a	b	c
d	5	e
f	g	h

$a + b + c = 15$
$d + e = 10$
$f + g + h = 10$
$a + d + f = 15$
$b + g = 10$
$c + e + h = 15$
$a + h = 10$
$c + f = 10$

8 equazioni, 9 incognite
→ il sistema di equazioni ha più di una soluzione

Ma adesso siamo già equipaggiati con dei mezzi potenti:
Le soluzioni sono infinite, ma nel dominio di numeri *interi* (i.e. non negativi) non così tante…

Due tipi di esercizi

- **Didattici**: servono a insegnare qualcosa (= un bit d'informazione o un bit delle capacità); anche lo studente più debole esce con l'impressione «com'è semplice questo esercizio!»
- **Sadici**: «adesso ti faccio sapere chi governa qua!» – dice l'insegnante / ministro / autore del libro di testo

Nel esercizio (1) (2) avevo scelto inizialmente «4» e «5» ma $3 \cdot 4+5=17$, allora i calcoli coinvolgevano i numeri dispari («caffi» come li chiamava Galileo).

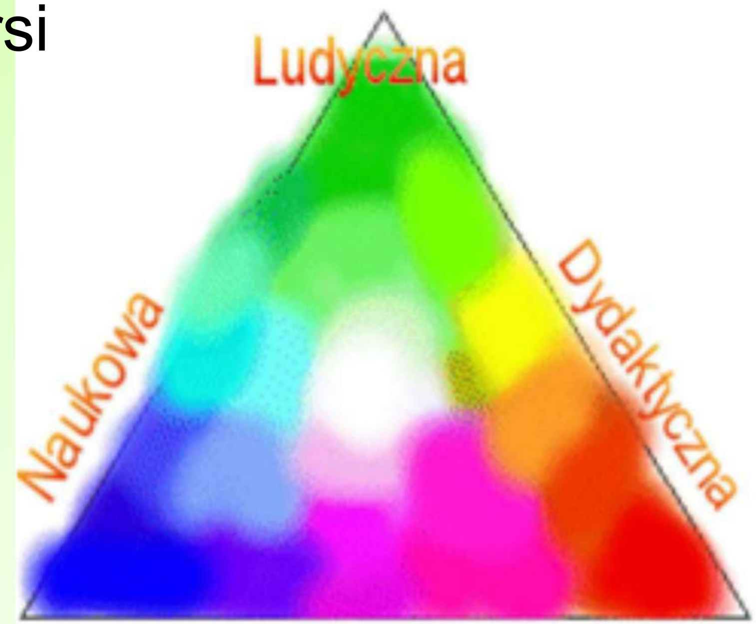
Osserviamo inoltre, che è molto più facile inventare un esercizio («scegli due numeri a caso») che risolverlo.

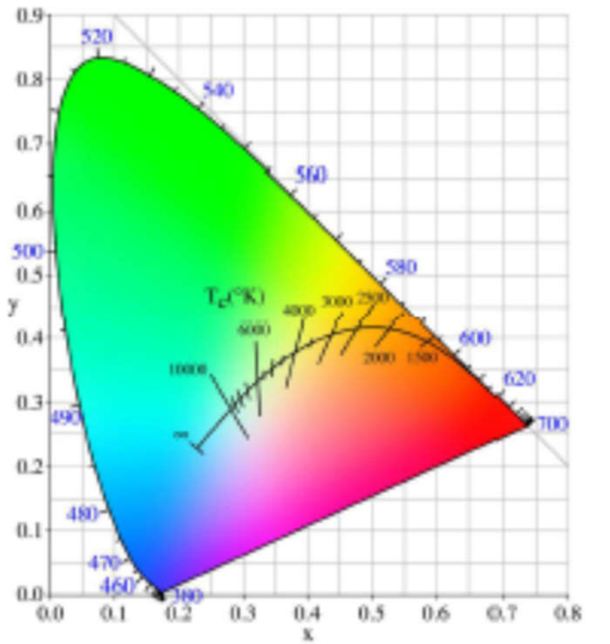
Le tre funzioni dell’insegnamento

- **Ludica:** uno spettatore qualsiasi esce coll’impressione «Ma come divertente è questo oggetto!»
- **Didattica**: lo studente, anche il più debole esce con l’impressione «Com’è semplice questo esercizio!»
- **Scientifica**: il ricercatore universitario / professore universitario / titolare della cattedra al liceo esce con un pensiero «O dio! Non so niente in questa materia. Devo darmi da fare!»

Le tre funzioni cognitive

1. Interrogarsi
2. Capire
3. Divertirsi



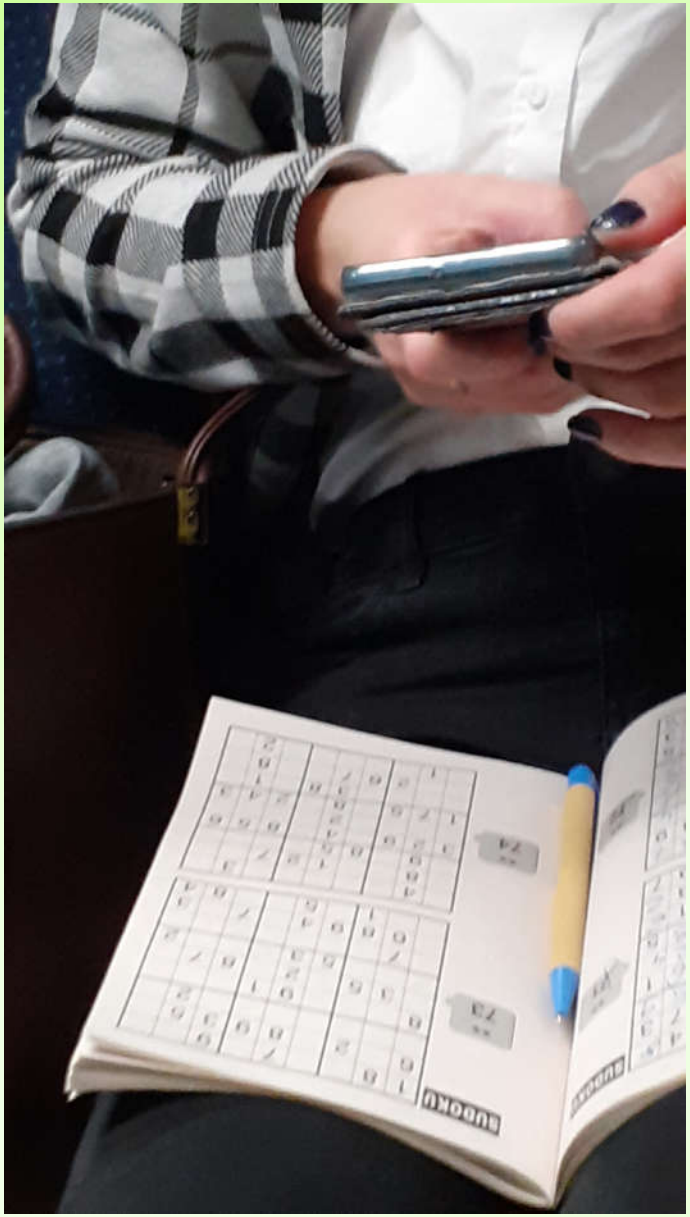


1. Ludica: Che beeello! [Musei di scienza]
2. Didattica: Ma, come semplice! [Scuola]
3. Scientifica: Oh Dio! Non capisco niunte! [Universita']

Attualmente le tre funzioni (nella scuola, all'universita' etc.) sono disgiunte

G. Karwasz, J. Kruk, Introduzione alla didattica interattiva, Ed. Sci. UMK, 2011 (in polacco)

Questo si chiama sudoku



ed è un fenomeno sociale

8		
	3	5

	9	1
8	2	
5	3	

e possiamo sfruttare…

Treno Torun-Danzica, 08-11-2022

Il principio didattico «9:1»

- L'insegnante deve sapere 9 volte di più di quello che deve trasmettere ai ragazzi

Siamo partiti da un esercizio al livello della 2° elementare, e andando secondo la difficoltà crescente abbiamo finito con il problema che ha superato le possibilità pure di Einstein.

Il metodo di Kramer sta esattamente a metà di questo percorso.

Inoltre, abbiamo presentato tante applicazioni prattiche e ingegneristiche di un problema che sembrava «un piccolo cavillo mentale».

Diverse applicazioni servono per *personalizzare* l'interesse dello studente.

Non dobbiamo capire tutto: il nostro limite si posiziona nel punto «giusto», *individualizzato*.

Questo è proprio il senso della scienza: uno sviluppo a piccoli passo, sulle strade diverse, ma costante. E nonostante molta strada fatta, altrettanta rimane da fare (per i ragazzi, nella loro vita adulta).

Grazie per la Vs attenzione