

Lezione

Tecnica delle Costruzioni

Il momento flettente

La verifica di sezioni inflesse

Momento flettente

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Pertanto:

$$N = E \varepsilon_G \int dA + E \chi_x \int x dA + E \chi_y \int y dA = E \varepsilon_G A = 0$$

$$M_x = E \varepsilon_G \int y dA + E \chi_x \int x y dA + E \chi_y \int y^2 dA = E \chi_y I_x$$

$$M_y = E \varepsilon_G \int x dA + E \chi_x \int x^2 dA + E \chi_y \int x y dA = - E \chi_x I_y$$

essendo $\int x dA = \int y dA = 0$ e $\int x y dA = 0$

Momento flettente

1° stadio (Formule di Scienza delle Costruzioni)

Con riferimento alla sezione omogeneizzata vale la formula di Scienza delle Costruzioni

$$\sigma = E(\varepsilon_G + \chi_x x + \chi_y y)$$

Curvatura nel piano x-z

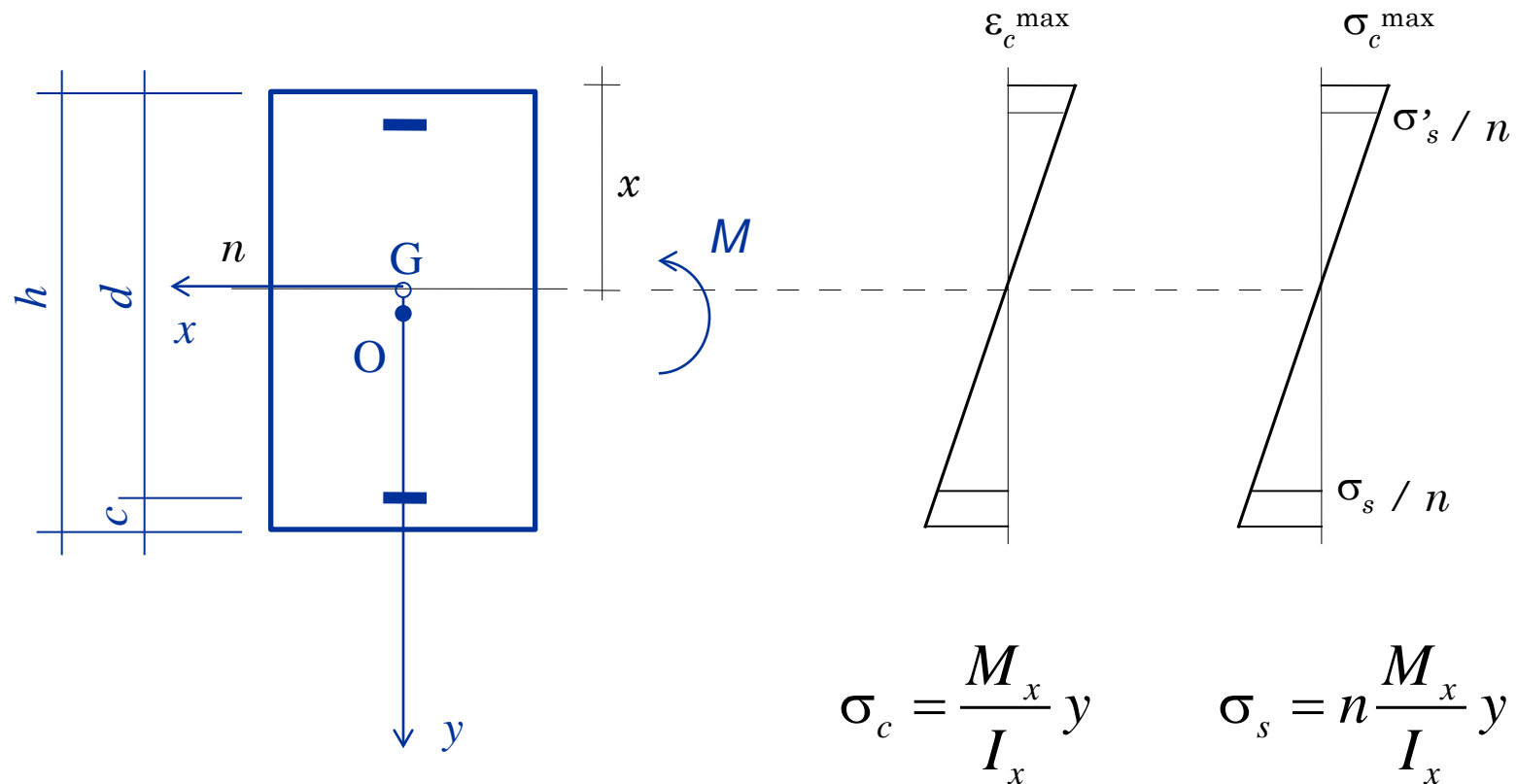
Curvatura nel piano y-z

Poiché $\varepsilon_G=0$

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y$$

Momento flettente

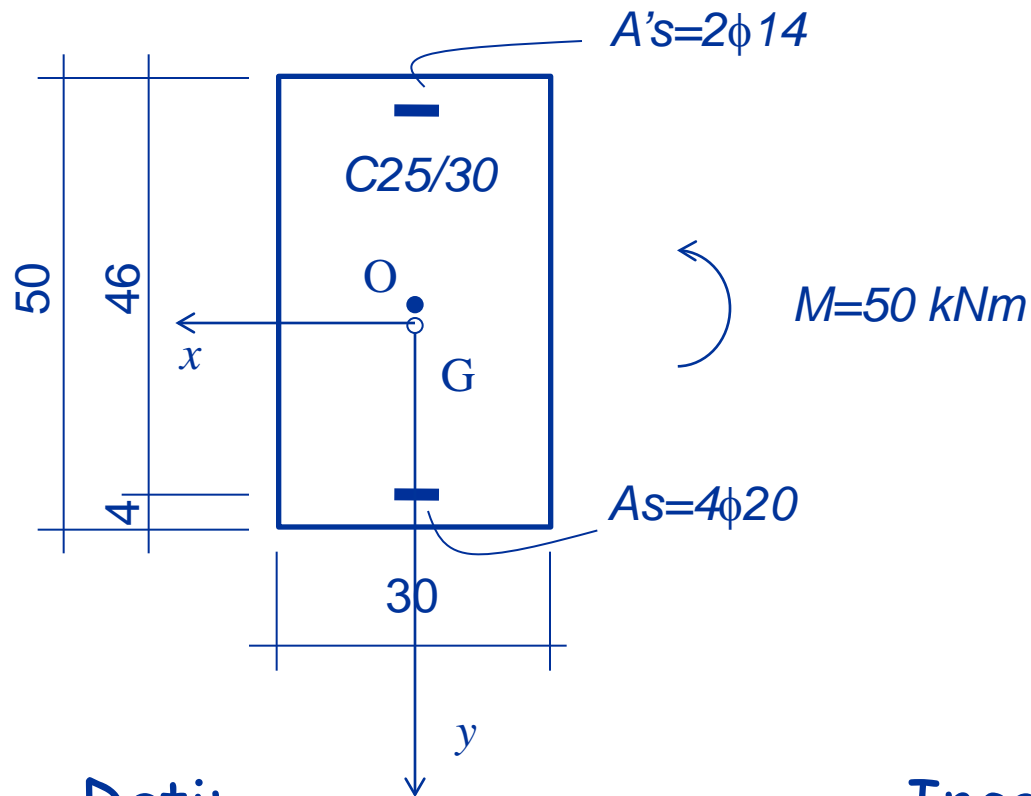
1° stadio (Calcolo delle tensioni)



Nota: il punto O coincide con G
se le armature A_s e A'_s sono uguali

Esempio n.1

1° stadio



Dati:

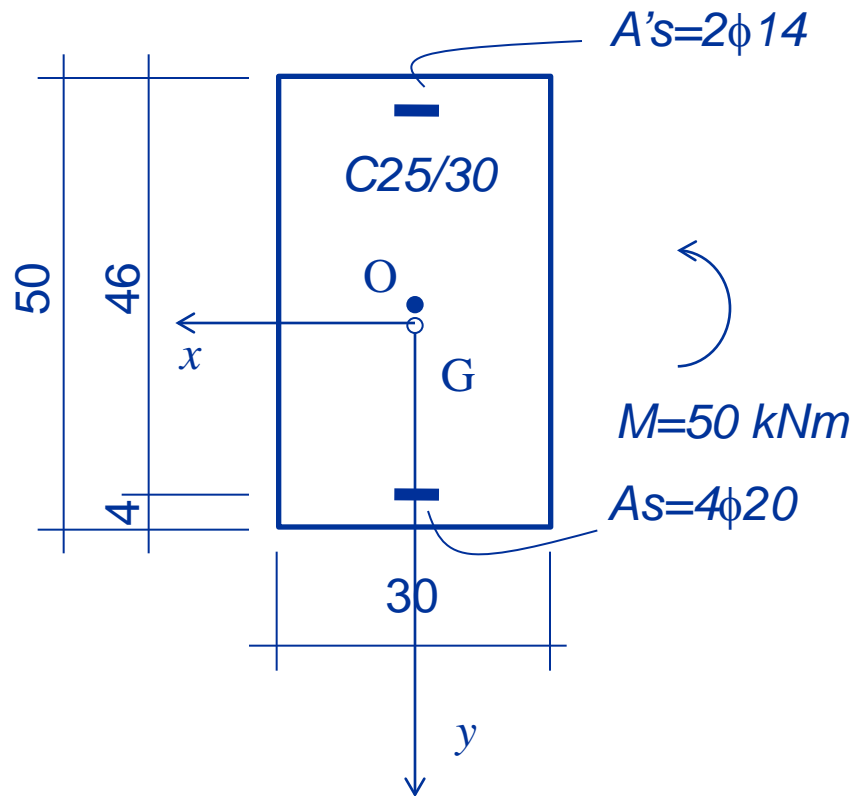
Geometria della sezione
Armature

Incognite:

Tensioni massime

Esempio n.1

1° stadio

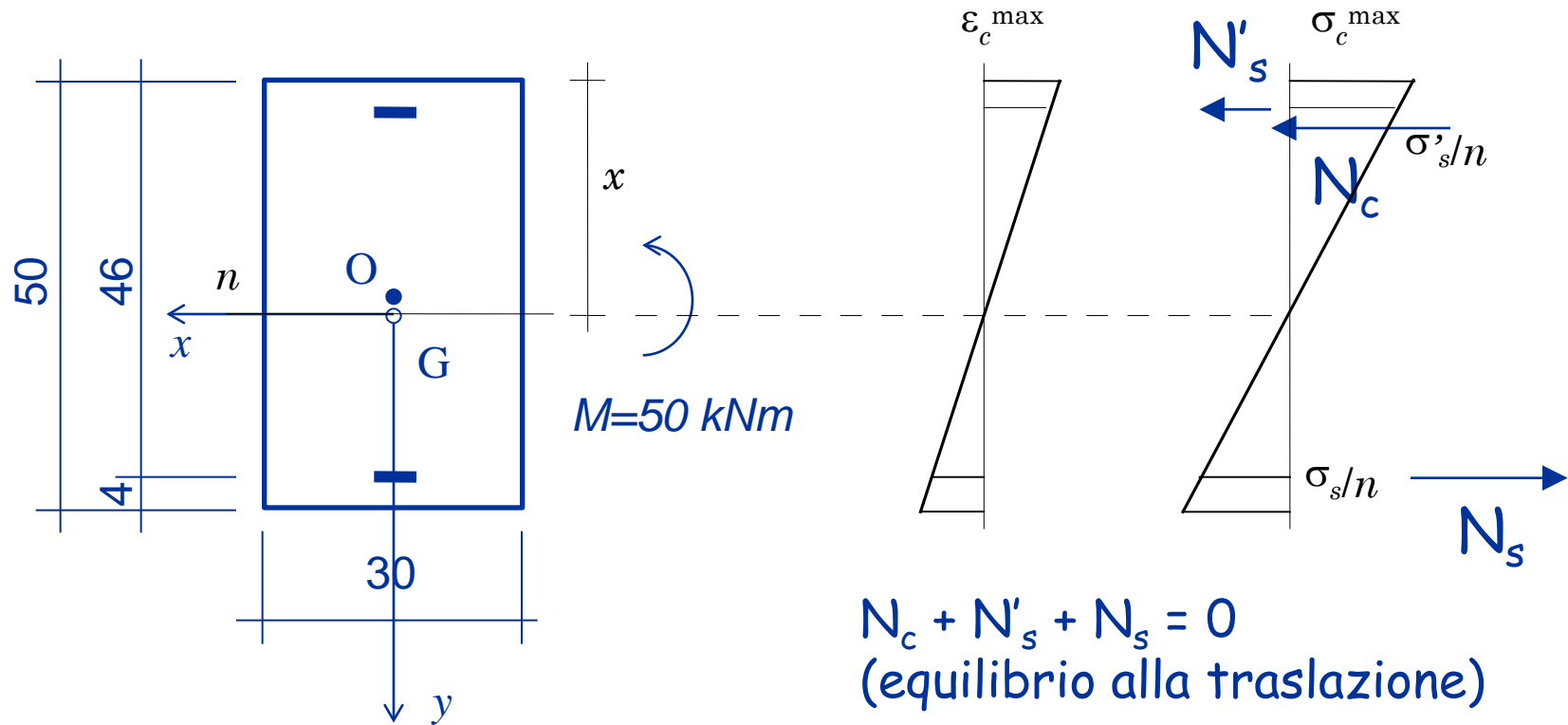


Procedura:

1. Individuazione dell'asse neutro
2. Determinazione del momento d'inerzia
3. Calcolo delle tensioni

Esempio n.1

1° stadio



1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

(equilibrio alla traslazione)

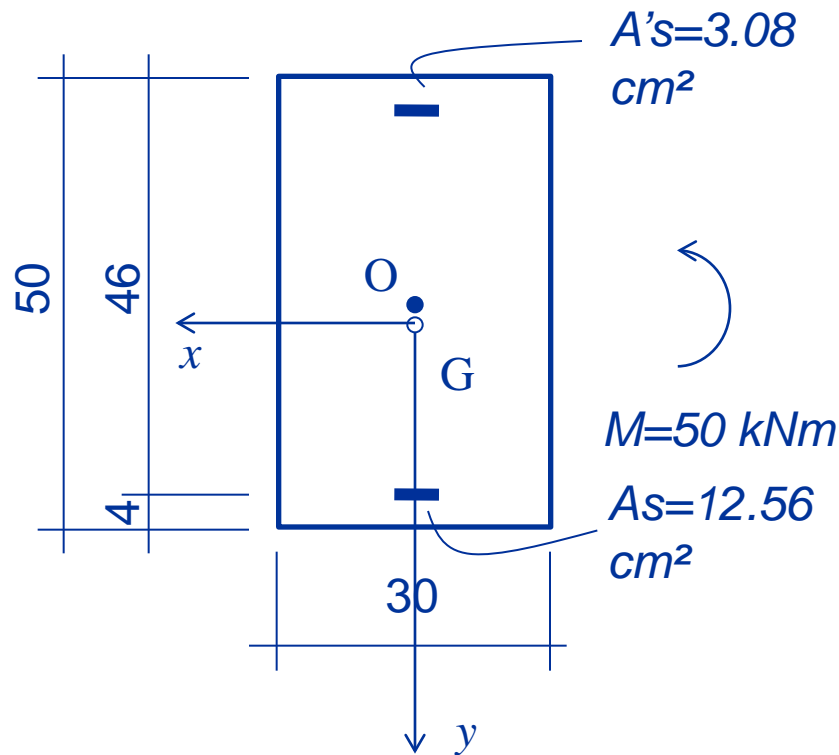
oppure

$$S_n = 0$$

(l'asse neutro è baricentrico)

Esempio n.1

1° stadio



Calcolo della posizione
del baricentro
(l'asse neutro è baricentrico)

$$A = bh + n(A_s + A'_s) = 30 \times 50 + 6.35 \times (12.56 + 3.08) = 1599.3 \text{ cm}^2$$

$$S = bh^2/2 + n(A_s d + A'_s c) = 30 \times 50^2/2 + 6.35 \times (12.56 \times 46 + 3.08 \times 4) =$$

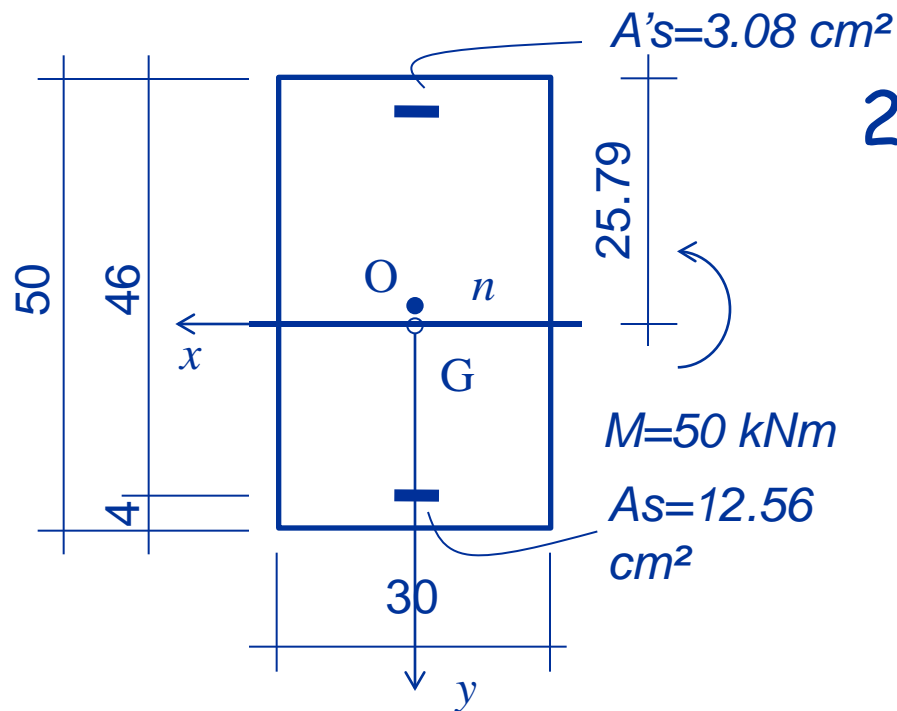
41247 cm^3 (calcolato rispetto ad un asse passante per il bordo superiore della sezione)

$$d_{G,sup} = S/A = 41247/1599.3 = 25.79 \text{ cm}$$

$$d_{G,inf} = h - d_{G,sup} = 50 - 25.79 = 24.21 \text{ cm}$$

Esempio n.1

1° stadio

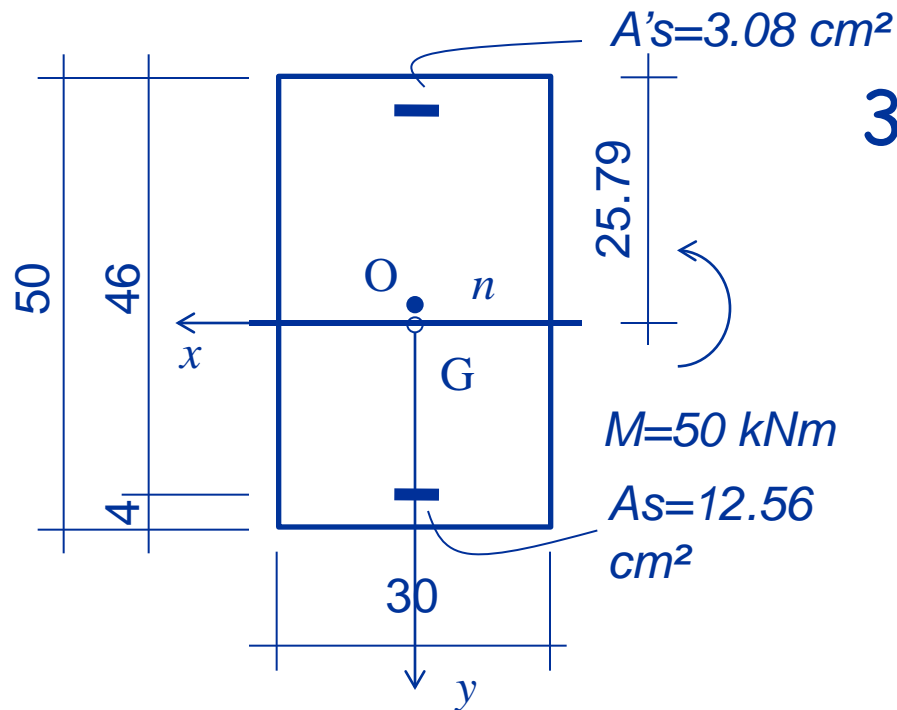


2. Calcolo del momento d'inerzia

$$I = b d_{G,\text{sup}}^3/3 + b d_{G,\text{inf}}^3/3 + n[A_s(d_{G,\text{inf}} - c)^2 + A'_s(d_{G,\text{sup}} - c)^2] =$$
$$30 \times (24.21^3 + 25.79^3)/3 + 6.35 \times [12.56(24.21 - 4)^2 + 3.08(25.79 - 4)^2] =$$
$$355298 \text{ cm}^4$$

Esempio n.1

1° stadio



3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_{c,sup} = \frac{50 \times 10^6}{(355298 \times 10^4)} (-25.79) \times 10 =$$

$$-3.63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,inf} = 1.407 \times 10^2 \times 24.21 \times 10 =$$

$$3.41 \text{ MPa}$$

$$f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

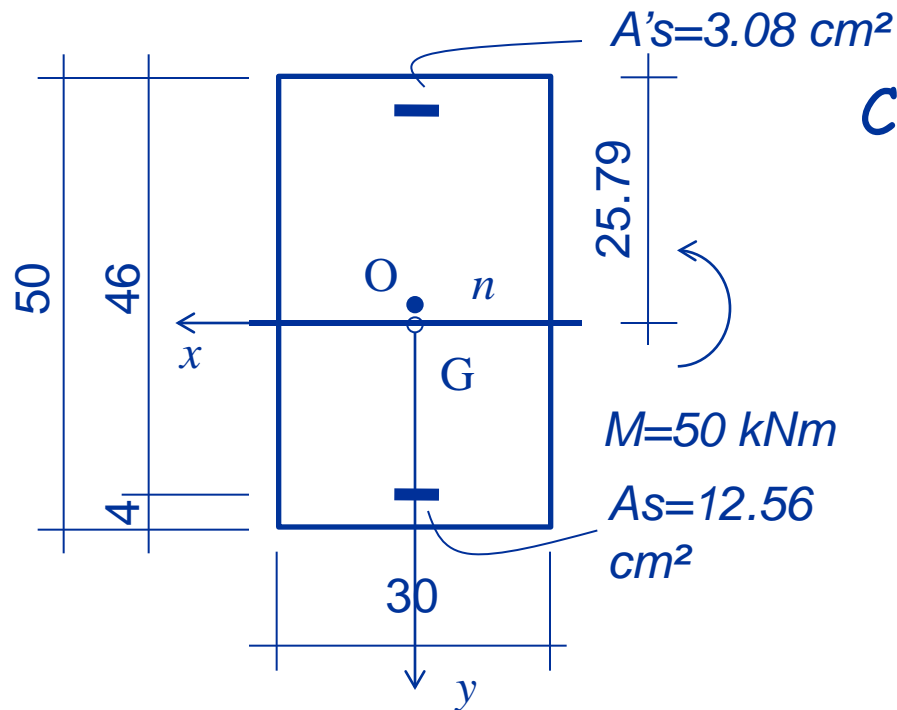
$$\sigma_{s,sup} = 6.35 \times 140.7 \times (-25.79 + 4) \times 10 = -19.5 \text{ MPa}$$

La sezione è fessurata

$$\sigma_{s,inf} = 6.35 \times 140.7 \times (24.21 - 4) \times 10 = 18.1 \text{ MPa}$$

Esempio n.1

1° stadio



Calcolo del momento di prima fessurazione

$$\sigma_c = \frac{M_x}{I_x} d_{G,inf} = f_{cfk}$$

$$f_{cfk} = 2.16 \text{ MPa}$$

$$M_f = \frac{355298 \times 10^4 \times 2.16 \times 10^{-6}}{(24.21 \times 10)}$$

$$31.7 \text{ kNm}$$

Momento flettente

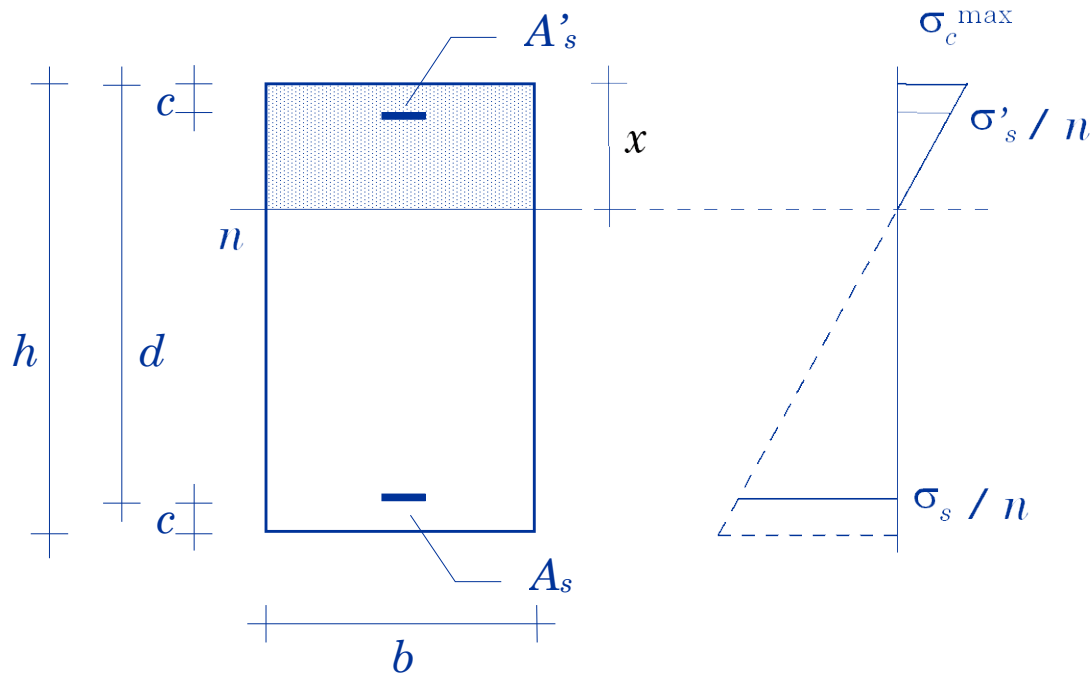
2° stadio

Nel secondo stadio di comportamento, il calcestruzzo sottoposto a deformazioni longitudinali di allungamento non è reagente.

Di ciò si dovrà tenere debito conto per la determinazione della posizione dell'asse neutro e per la determinazione del momento d'inerzia.

Momento flettente

2° stadio

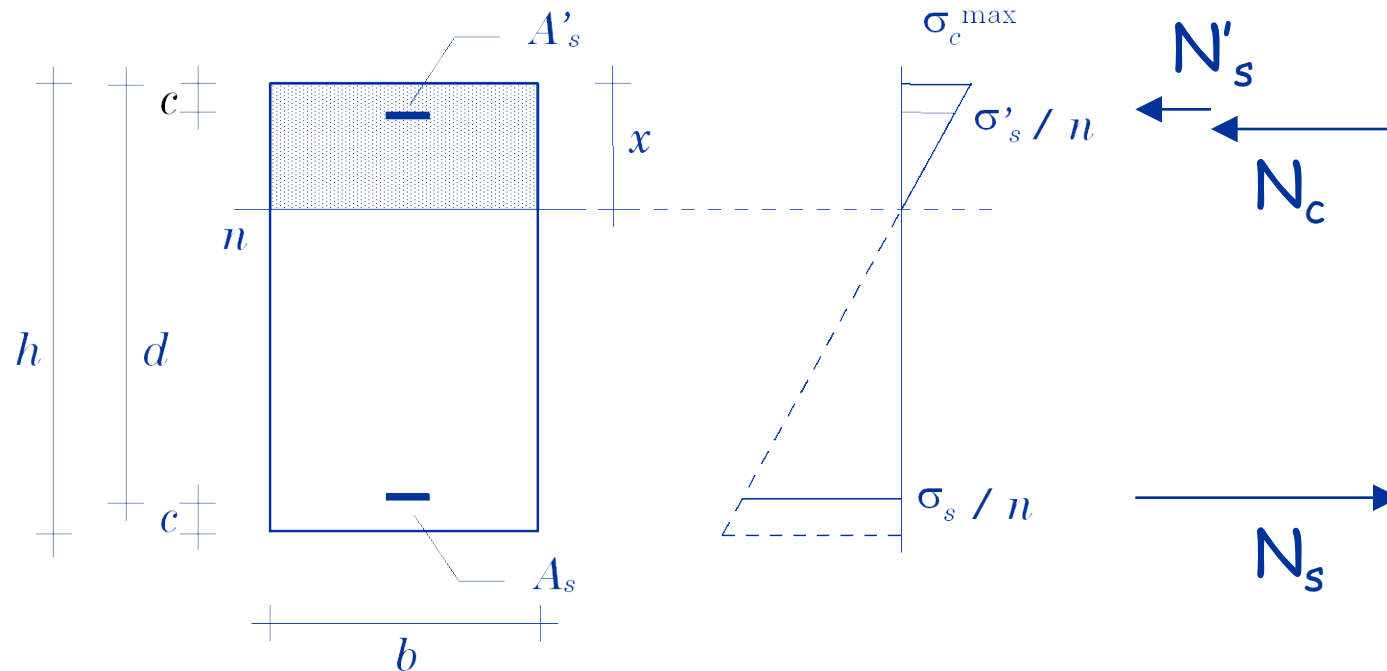


Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Tensioni massime

Momento flettente

2° stadio



1. Individuazione dell'asse neutro:

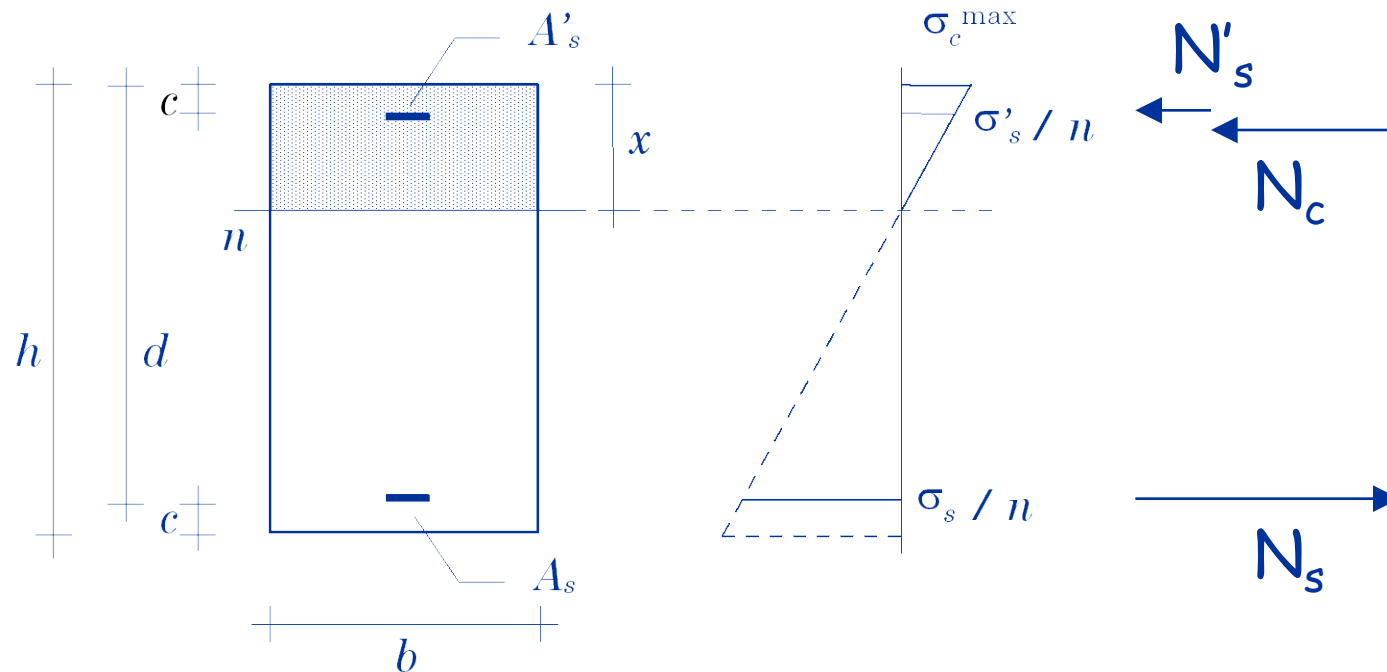
oppure ... $S_n = 0$

$N_c + N'_s + N_s = 0$
(equilibrio alla traslazione)

(l'asse neutro è baricentrico)

Momento flettente

2° stadio



$$S_n = -\frac{bx^2}{2} - nA'_s(x - c) + nA_s(d - x) = 0$$

ovvero ...
$$\frac{b}{2}x^2 - n(A_s + A'_s)x - n(A_s d + A'_s c) = 0$$

Momento flettente

2° stadio

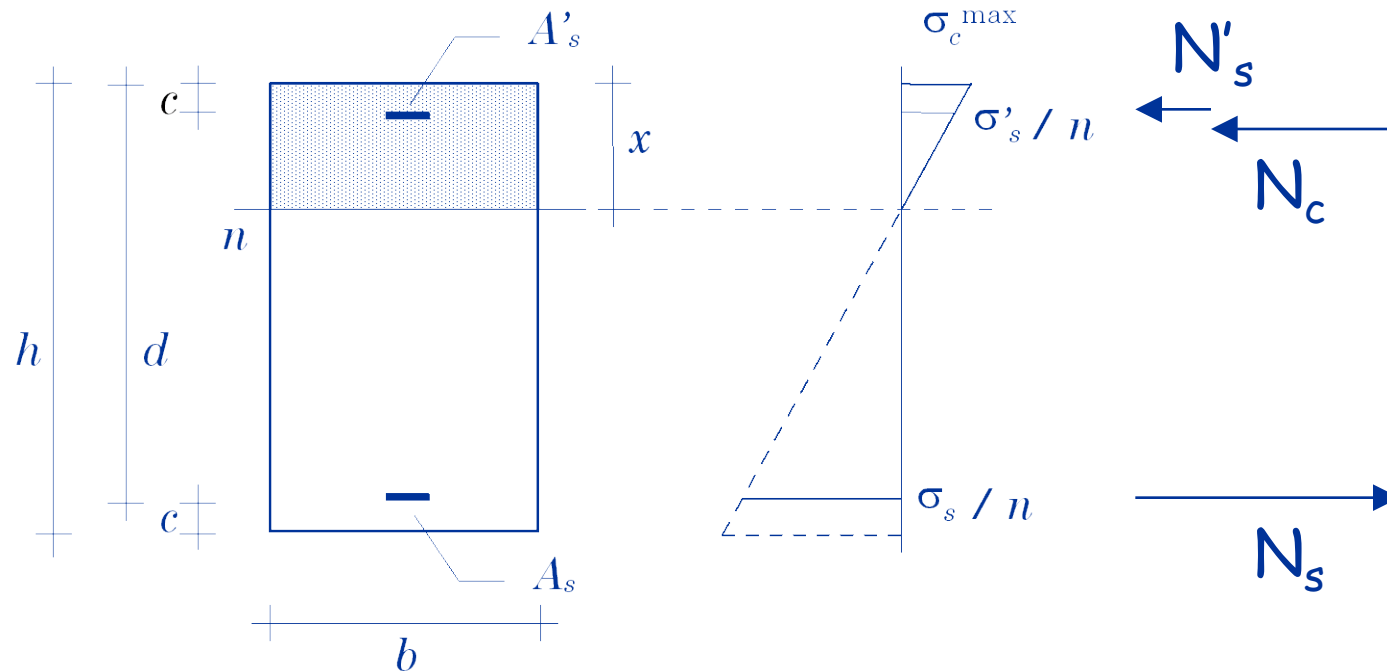
La precedente equazione di secondo grado ammette una unica soluzione possibile:

$$x = \frac{n(A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(A_s d + A'_s c)}{n(A_s + A'_s)^2}} \right]$$

L'altra soluzione individua un punto esterno alla sezione e pertanto non determina una posizione realistica dell'asse neutro. Nella sezione semplicemente inflessa, infatti, la risultante delle tensioni di trazione deve bilanciare quella delle compressioni e quindi l'asse neutro deve tagliare la sezione.

Momento flettente

2° stadio

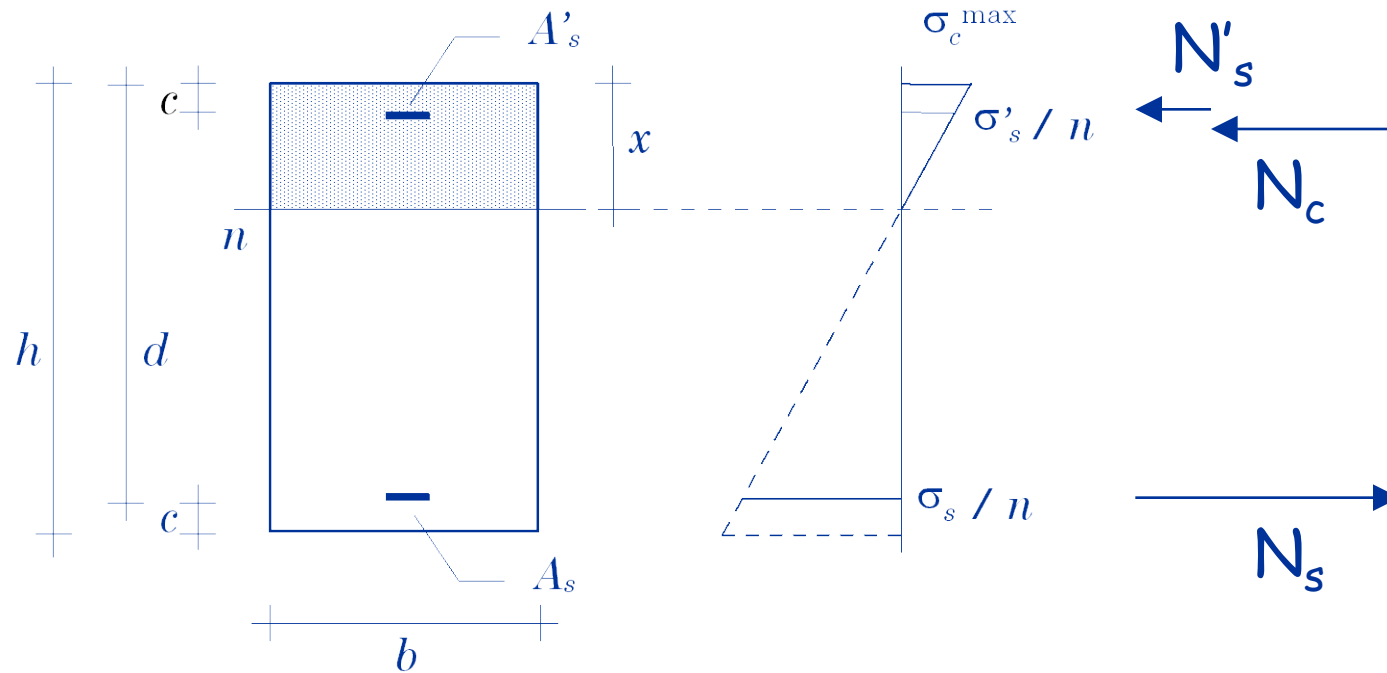


2. Determinazione del momento d'inerzia:

$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Momento flettente

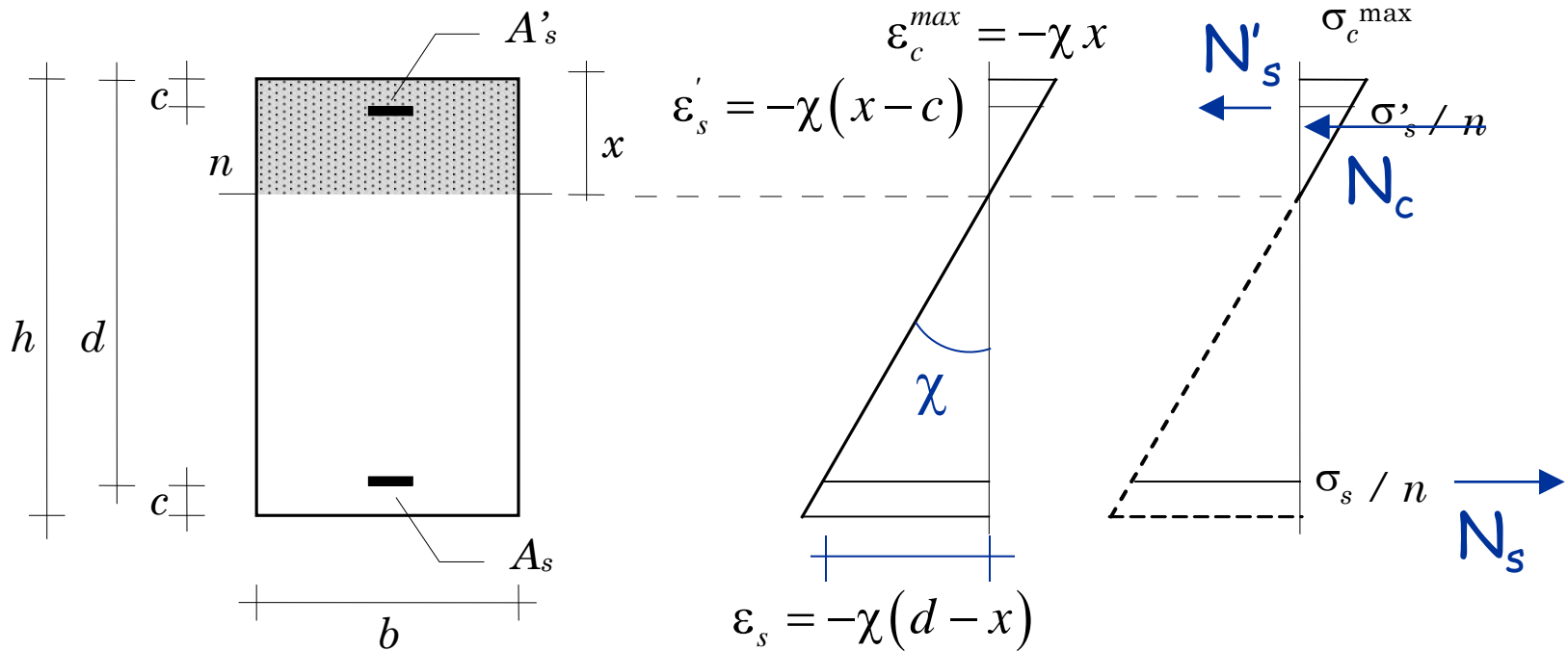
2° stadio



3. Calcolo delle tensioni: $\sigma_c = -\frac{M_x}{I_x} y$ $\sigma_s = -n \frac{M_x}{I_x} y$

Momento flettente

2° stadio ($N_c + N'_s + N_s = S_n = 0$)



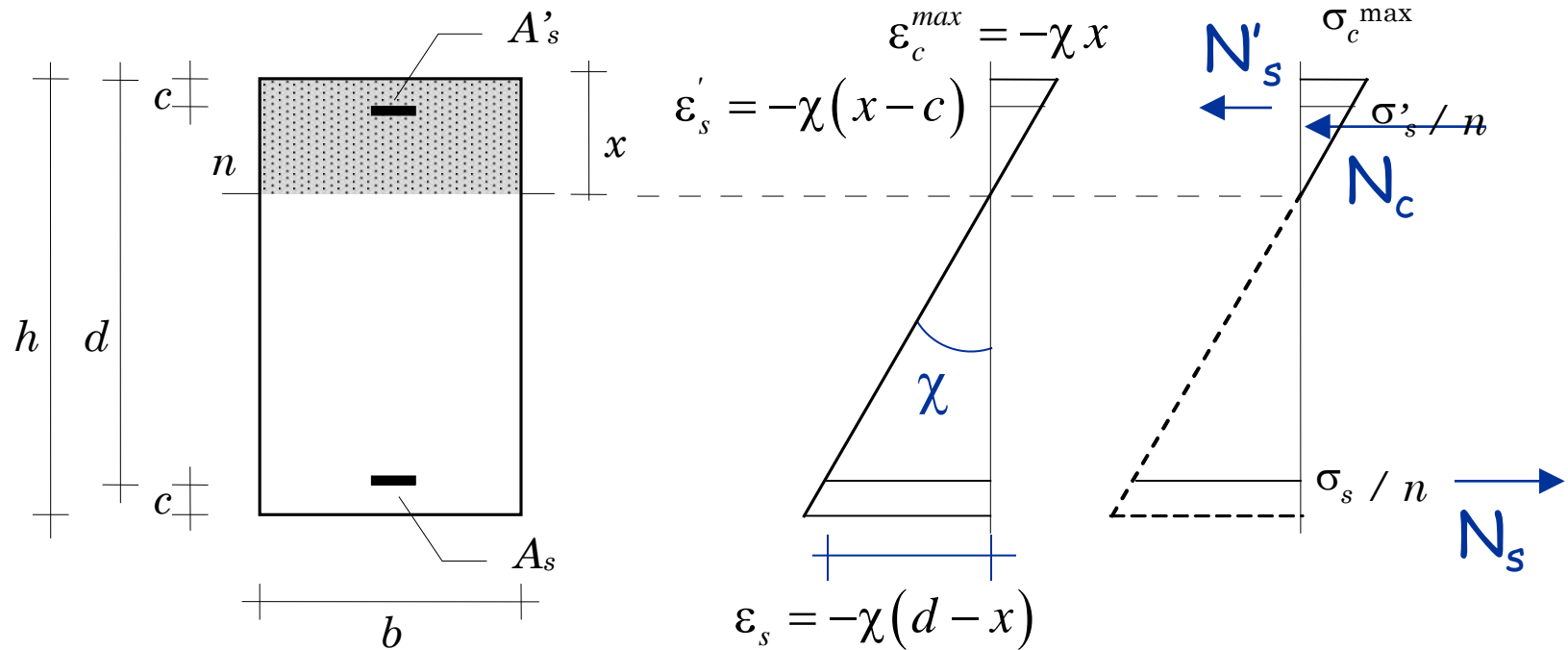
$$N_c = \frac{bx}{2} \sigma_c^{\max} = -E_c \chi \frac{bx^2}{2}$$

$$N_s = \sigma_s A_s = E_c \chi n A_s (d-x)$$

$$N'_s = \sigma'_s A'_s = -E_c \chi n A'_s (x-c)$$

Momento flettente

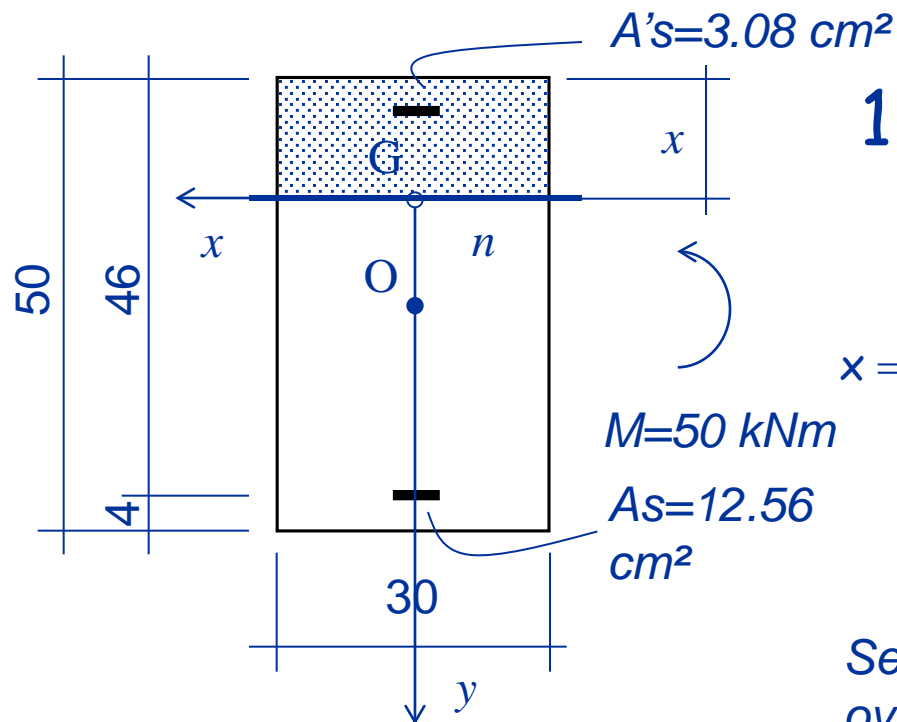
2° stadio ($N_c + N'_s + N_s = S_n = 0$)



$$N_c + N_s + N'_s = -E_c \chi \frac{bx^2}{2} + E_c \chi n A_s (d - x) - E_c \chi n A'_s (x - c) = 0$$

Esempio n.1

2° stadio



1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

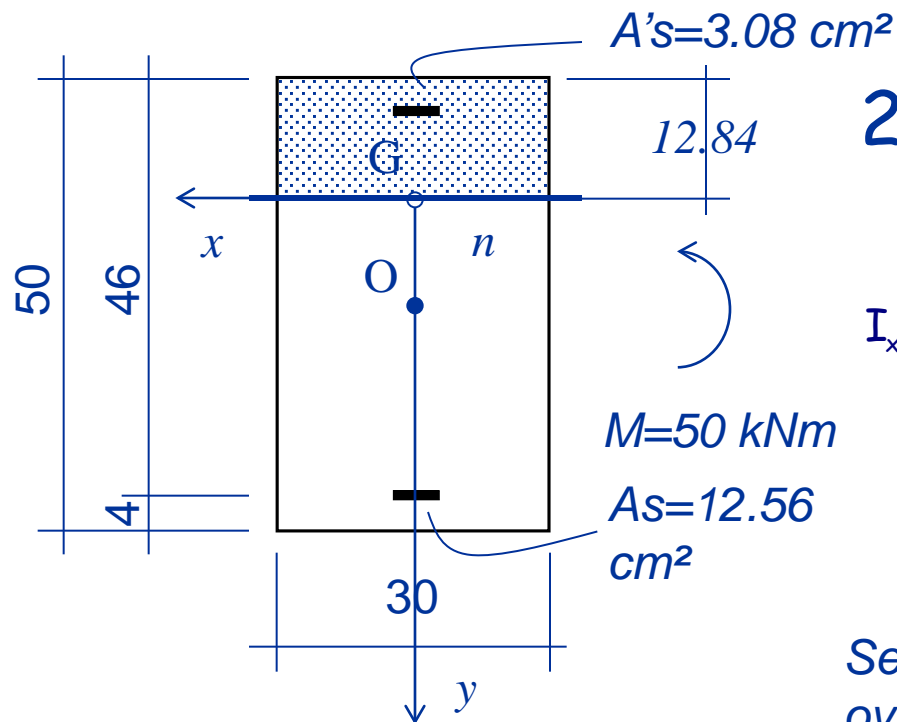
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se i carichi sono di breve durata
ovvero... $n = 6.35 = 200000 / 31500$

$$x = \frac{6.35 (12.56 + 3.08)}{30} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4)}{6.35 (12.56 + 3.08)^2}} \right] = 12.84 \text{ cm}$$

Esempio n.1

2° stadio



2. Calcolo del momento di inerzia

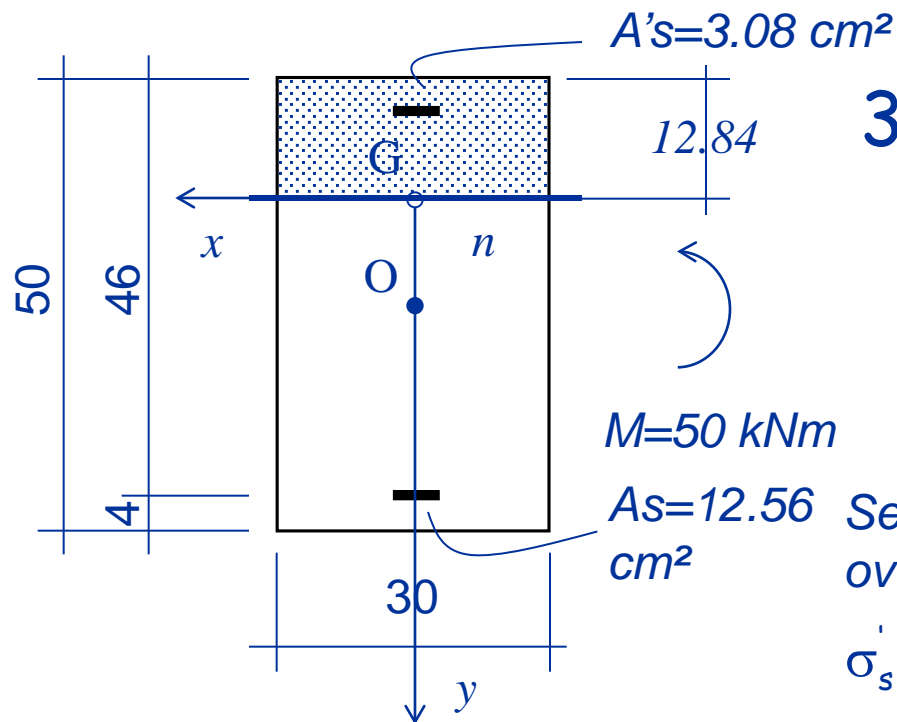
$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Se i carichi sono di breve durata
ovvero... $n = 6.35$

$$I = \frac{30 \cdot 12.84^3}{3} + 6.35 \left[3.08 (12.84 - 4)^2 + 12.56 (46 - 12.84)^2 \right] = 110385 \text{ cm}^4$$

Esempio n.1

2° stadio



3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = -\frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = -n \frac{M_x}{I_x} y$$

Se i carichi sono di breve durata
ovvero... $n=6.35$

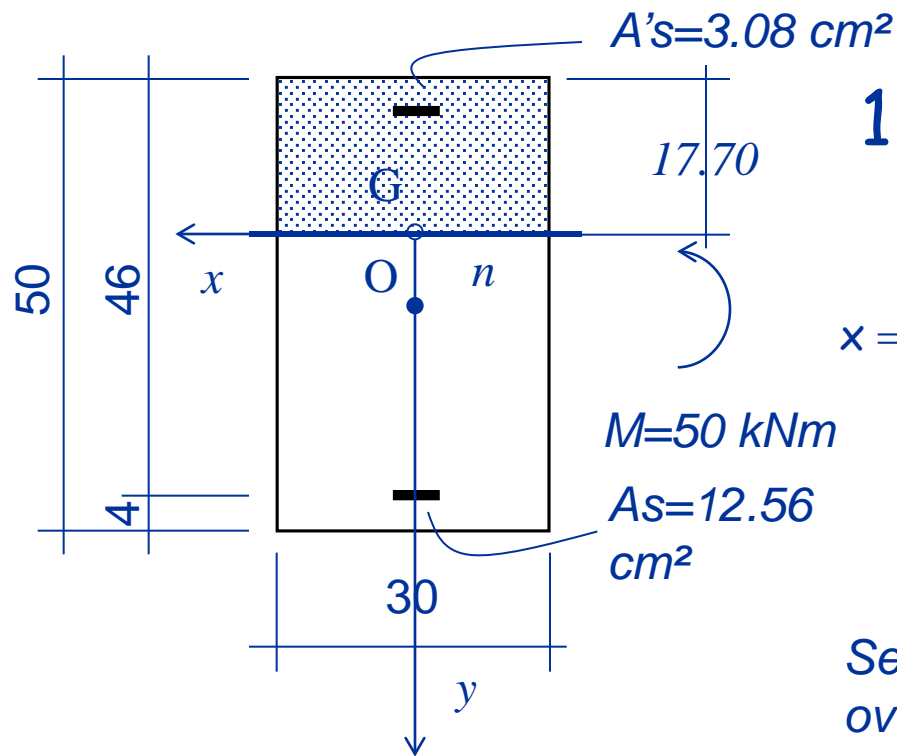
$$\sigma_s' = -6.35 \cdot 0.0453 \cdot (12.84 - 4) \cdot 10 = -25.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 6.35 \cdot 0.0453 \cdot (46 - 12.84) \cdot 10 = 95.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c, \text{sup}} = -\frac{50 \cdot 10^6}{110385 \cdot 10^4} 12.84 \cdot 10 = -5.81 \text{ MPa}$$

Esempio n.2

2° stadio



1. Calcolo della posizione dell'asse neutro

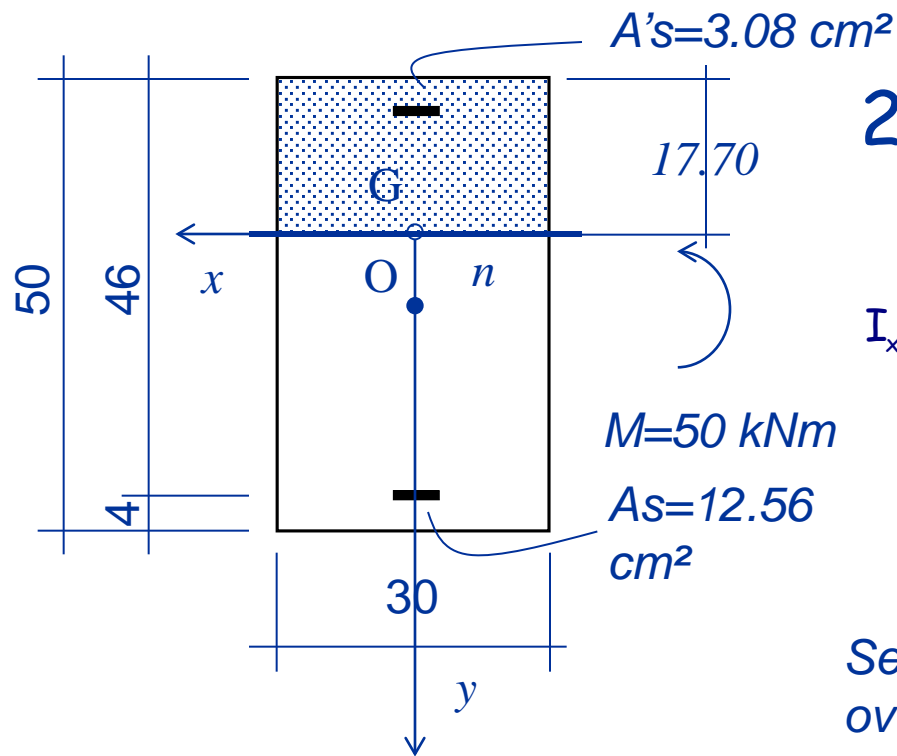
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se i carichi sono di lunga durata
ovvero... $n=15$

$$x = \frac{15 (12.56 + 3.08)}{30} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30 (12.56 \cdot 46 + 3.08 \cdot 4)}{15 (12.56 + 3.08)^2}} \right] = 17.70 \text{ cm}$$

Esempio n.2

2° stadio



2. Calcolo del momento di inerzia

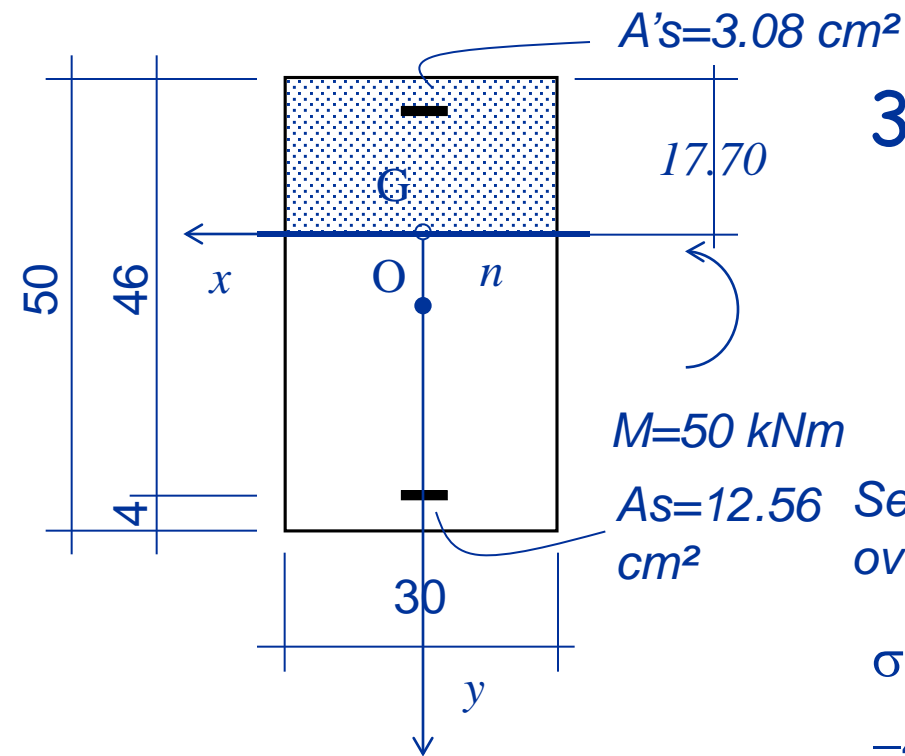
$$I_x = \frac{b x^3}{3} + n A'_s (x - c)^2 + n A_s (d - x)^2$$

Se i carichi sono di lunga durata
ovvero... $n=15$

$$I = \frac{30 \cdot 12.84^3}{3} + 15 \left[3.08 (12.84 - 4)^2 + 12.56 (46 - 12.84)^2 \right] = 215011 \text{ cm}^4$$

Esempio n.2

2° stadio



3. Calcolo delle tensioni

$$\sigma_c = -\frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_s = -n \frac{M_x}{I_x} y$$

Se i carichi sono di lunga durata
ovvero... $n=15$

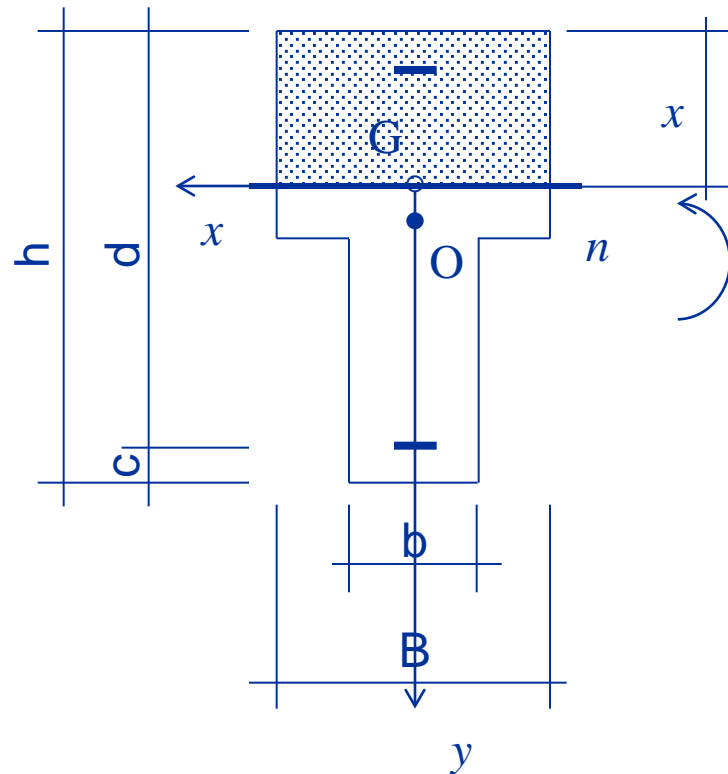
$$\sigma'_s = -15 \cdot 0.0453 \cdot (17.70 - 4) \cdot 10 = -47.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 0.0453 \cdot (46 - 17.70) \cdot 10 = 98.7 \text{ MPa}$$

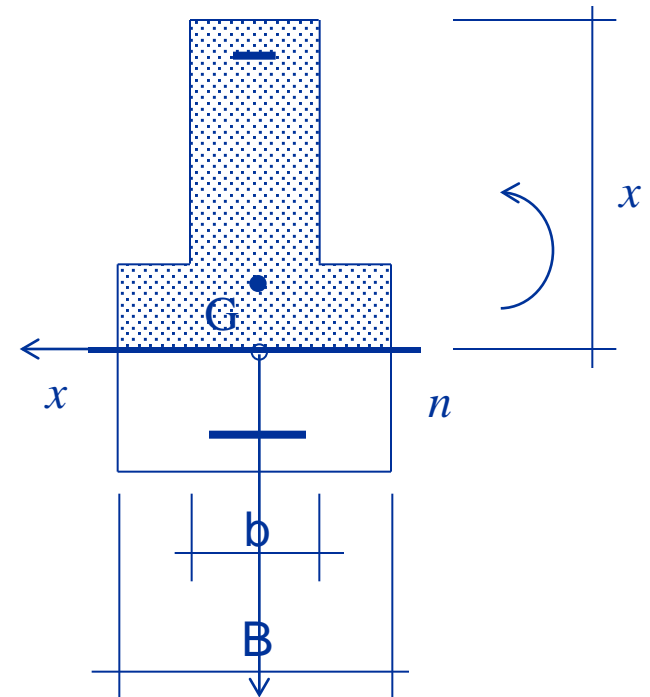
$$\sigma_{c,\text{sup}} = -\frac{50 \cdot 10^6}{110385 \cdot 10^4} 17.70 \cdot 10 = -4.12 \text{ MPa}$$

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



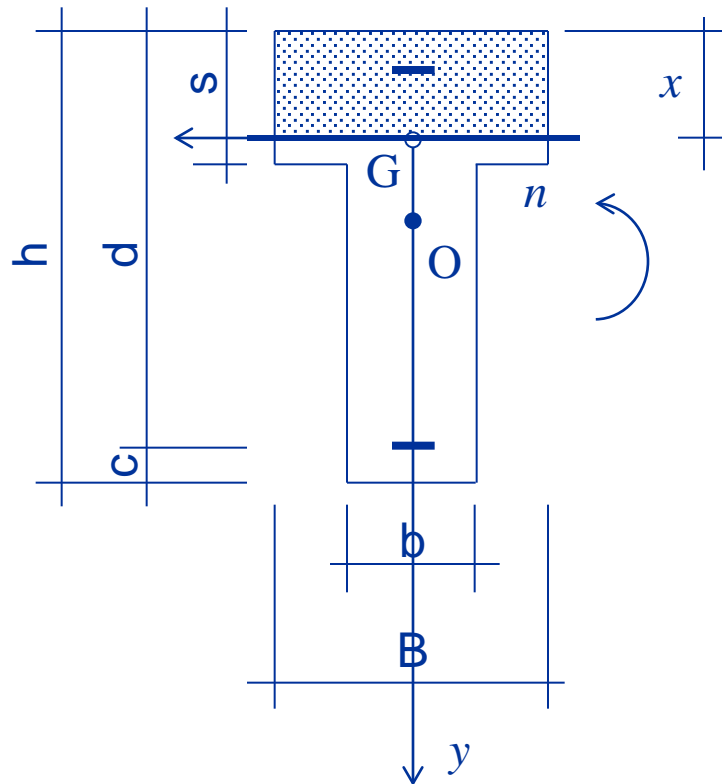
La sezione può essere trattata come rettangolare



La sezione NON può essere trattata come rettangolare

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



In presenza di una sezione rettangolare a tratti si può fare inizialmente l'ipotesi che la parte compressa sia rettangolare (ovvero, nel caso in figura, che l'asse neutro tagli l'ala).

Si determina la posizione dell'asse neutro con la formula:

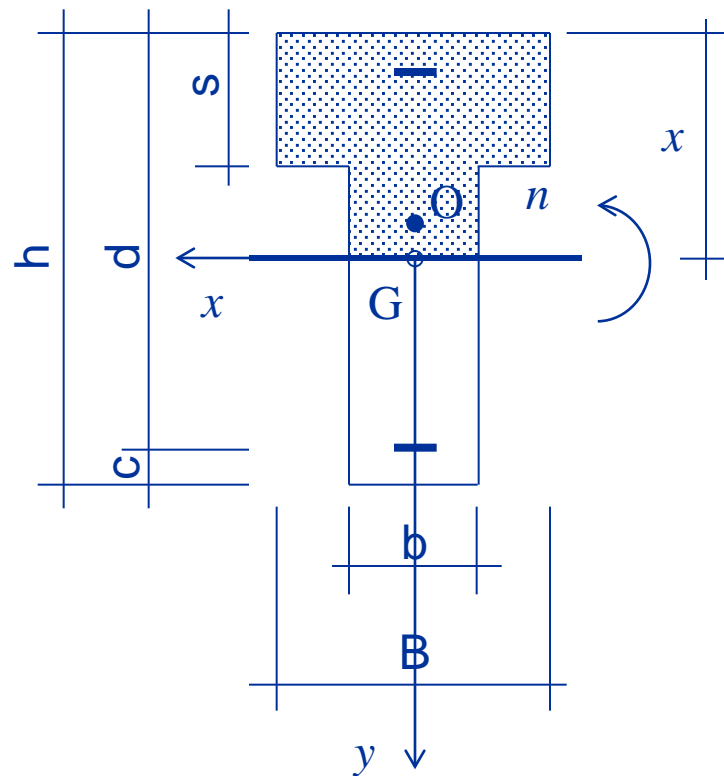
$$x = \frac{n (A_s + A'_s)}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (A_s d + A'_s c)}{n (A_s + A'_s)^2}} \right]$$

Se l'asse neutro taglia l'ala:

La posizione dell'asse neutro è corretta e il momento d'inerzia della sezione reagente omogeneizzata può essere calcolato con le formule della sezione rettangolare.

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



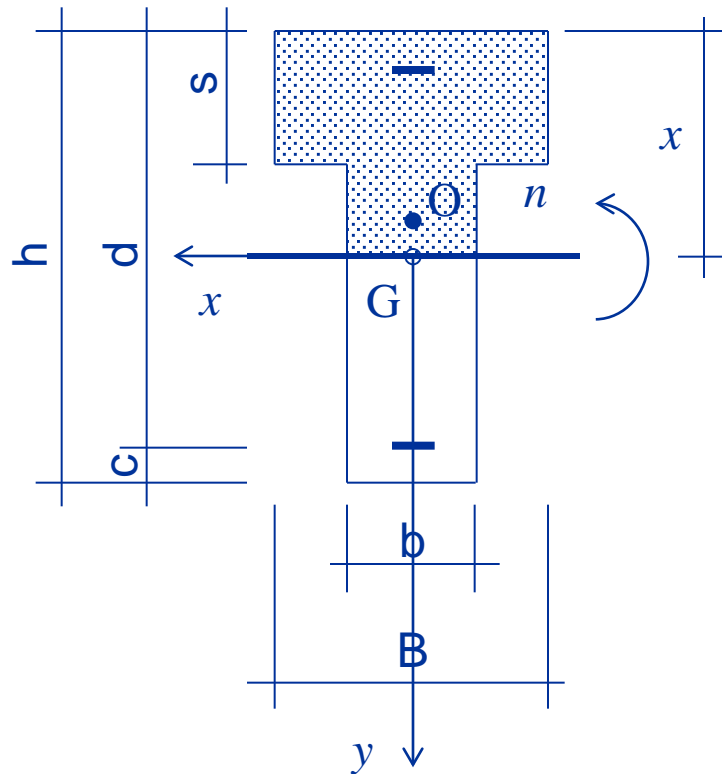
Se l'asse neutro non taglia l'ala,

la posizione calcolata dell'asse neutro è errata. La posizione dell'asse neutro deve essere rivalutata ipotizzando che l'asse neutro tagli l'anima. La nuova posizione dell'asse neutro può essere calcolata imponendo $N=0$ oppure $S_n=0$.

$$S_n = -\frac{B}{2}x^2 + \frac{(B-b)(x-s)^2}{2} - nA'_s(x-c) + nA_s(d-x) = 0$$

Momento flettente

2° stadio (sezioni non rettangolari)



Se l'asse neutro non taglia l'ala,
il momento d'inerzia deve essere
calcolato facendo riferimento alla
effettiva sezione reagente
omogeneizzata.

$$I_x = \frac{Bx^3 - (B-b)(x-s)^2}{3} + nA_s(d-x)^2 + nA'_s(x-c)^2$$

Momento flettente

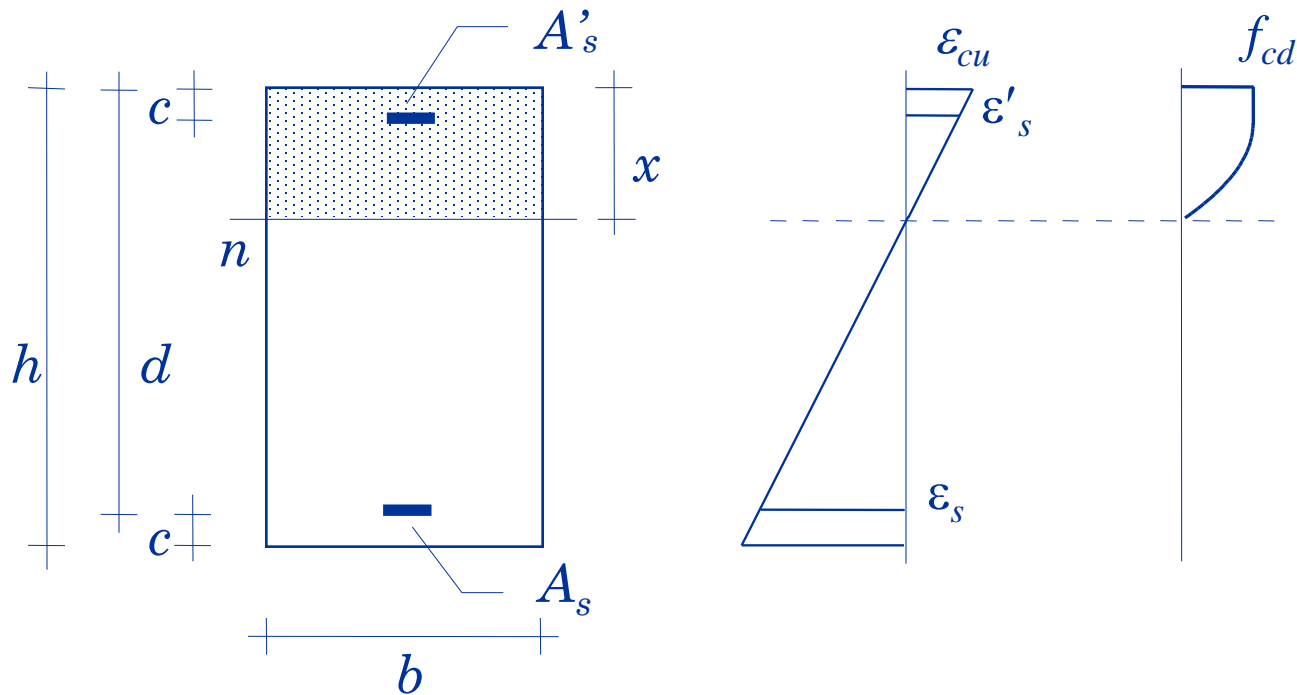
3° stadio

Nel terzo stadio di comportamento, il calcestruzzo sottoposto a deformazioni longitudinali di allungamento non è reagente e quello compresso ha un legame costitutivo non lineare. Anche l'acciaio presenta un legame non lineare.

Di ciò si dovrà tenere debito conto per la determinazione della posizione dell'asse neutro.

Momento flettente

3° stadio

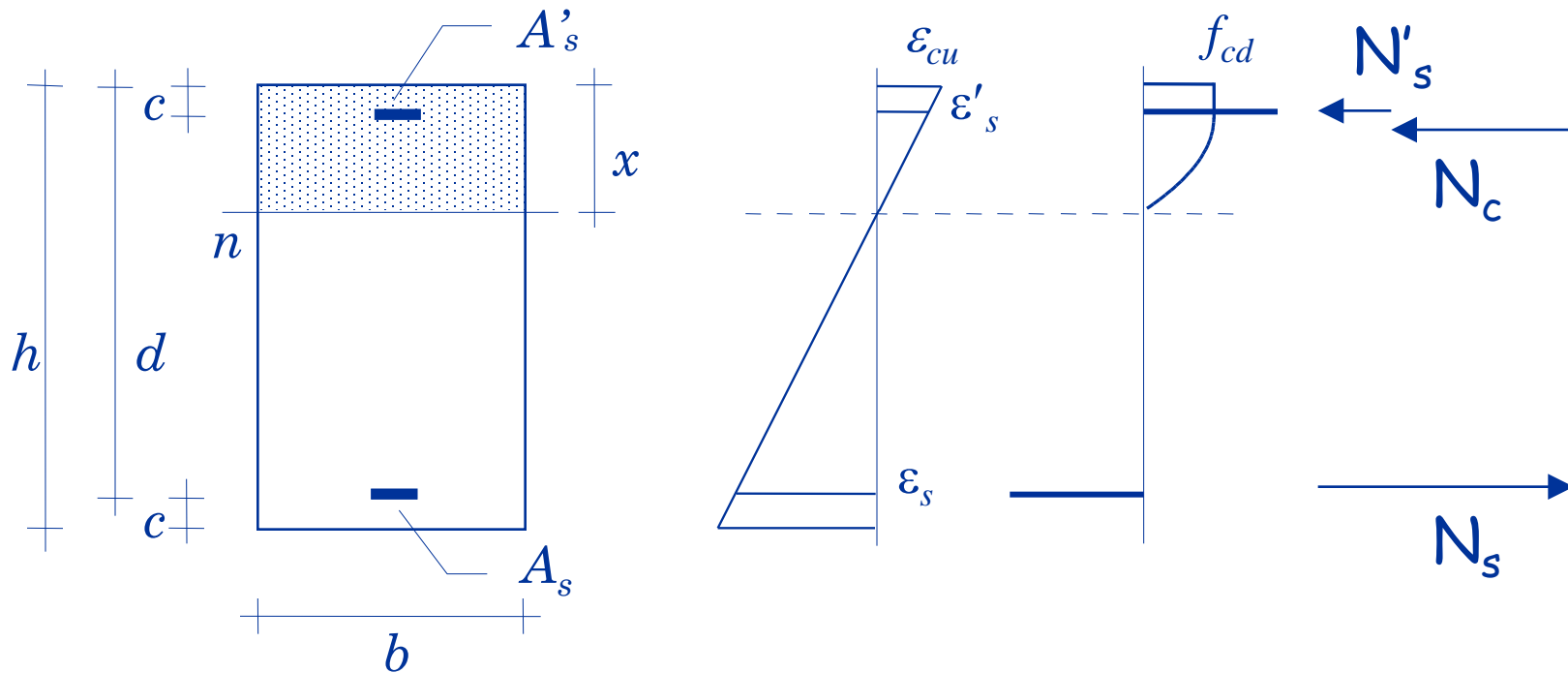


Dati:
Geometria della sezione
Armature

Incognite:
Momento resistente

Momento flettente

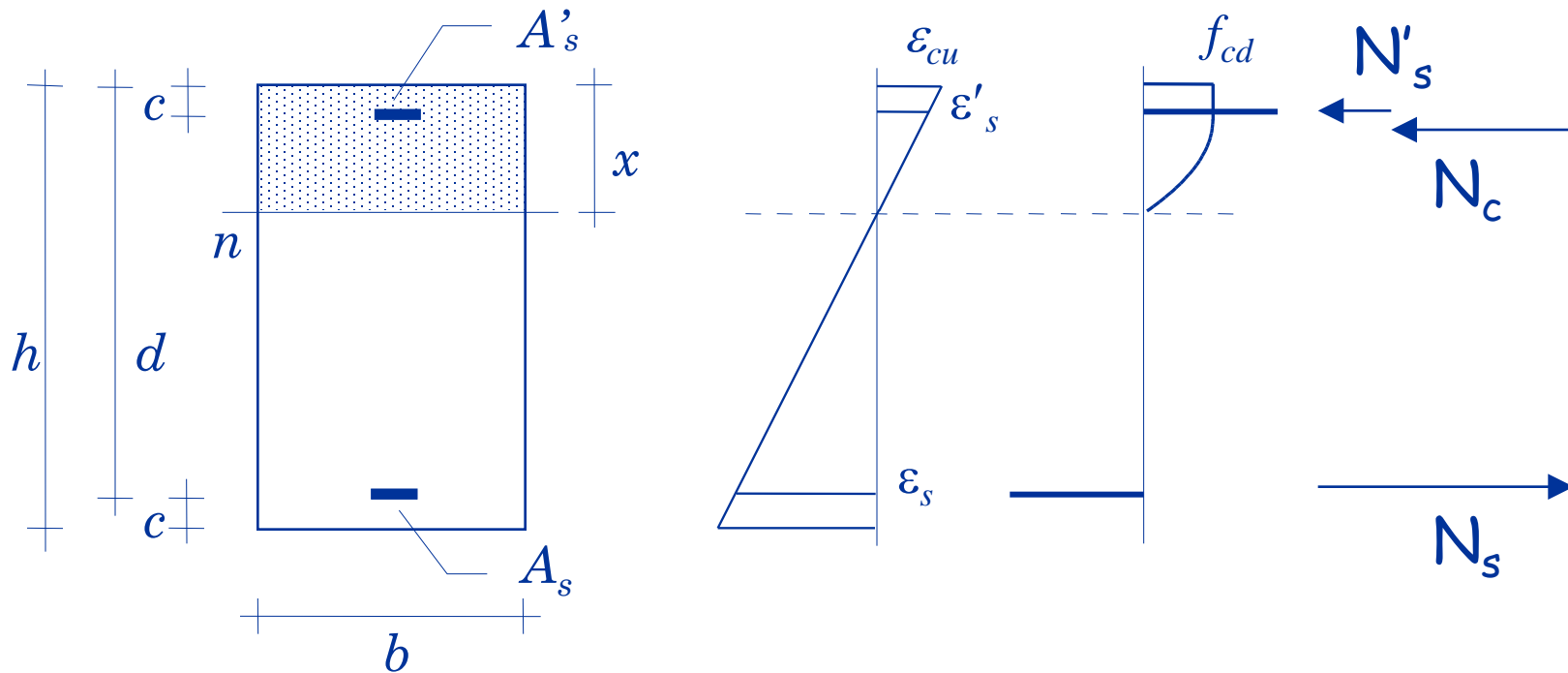
3° stadio



1. Individuazione dell'asse neutro
2. Determinazione del momento resistente

Momento flettente

3° stadio

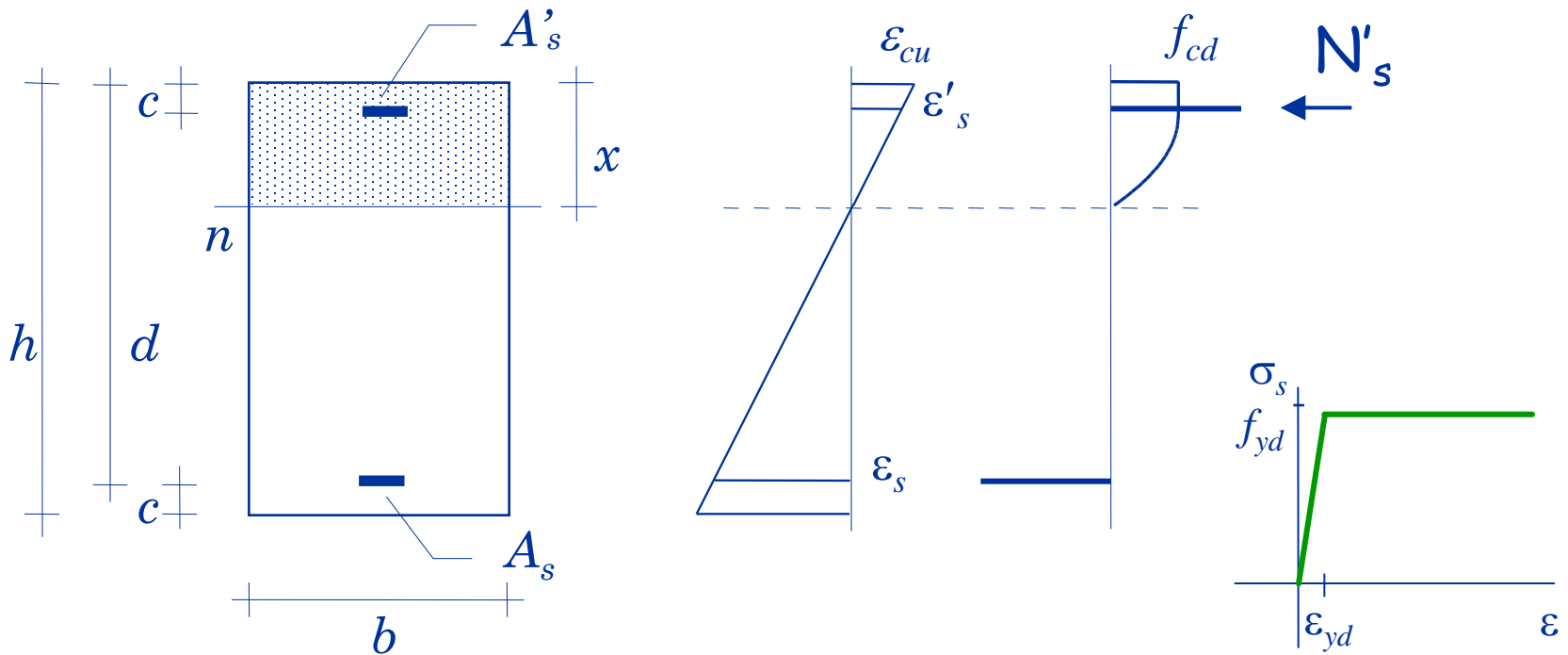


1. Individuazione dell'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = 0$$

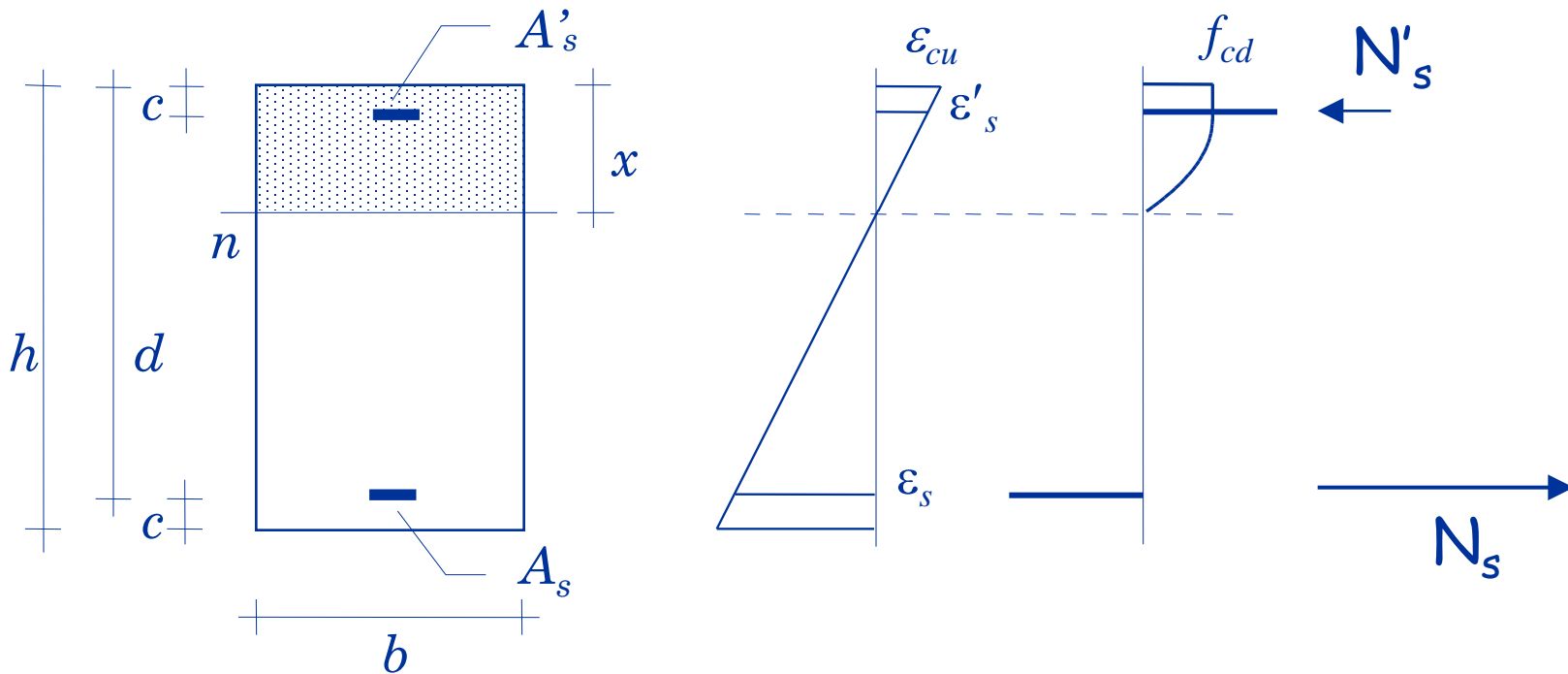
(equilibrio alla traslazione)

Imporre questa condizione è facile, perché:



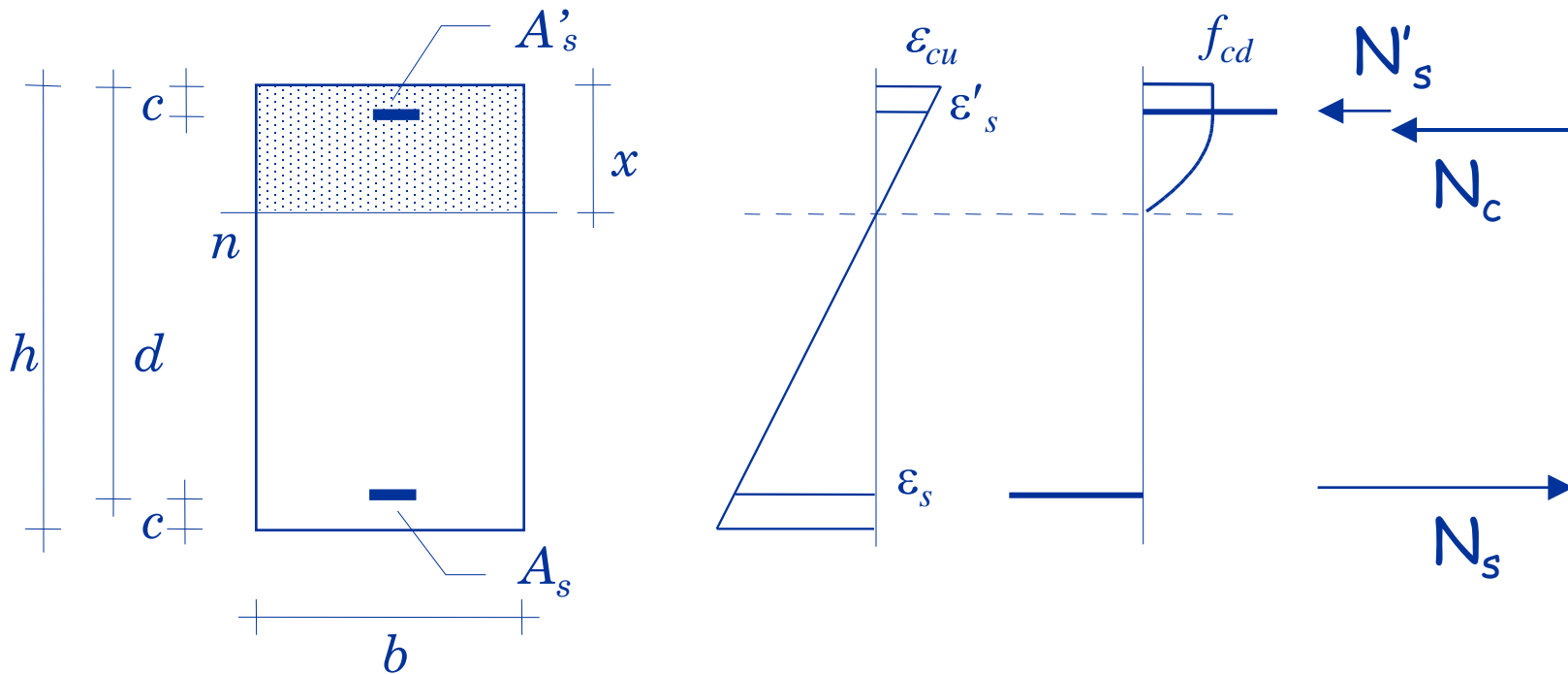
$$\epsilon'_s = \frac{x-c}{x} \epsilon_{cu} \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \quad (\text{molti casi}) \Rightarrow N'_s = A'_s f_{yd} \\ \text{se } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s \end{array} \right.$$

Imporre questa condizione è facile, perché:



si ha sempre $\epsilon_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow N_s = A_s f_{yd}$

Imporre questa condizione è facile, perché:

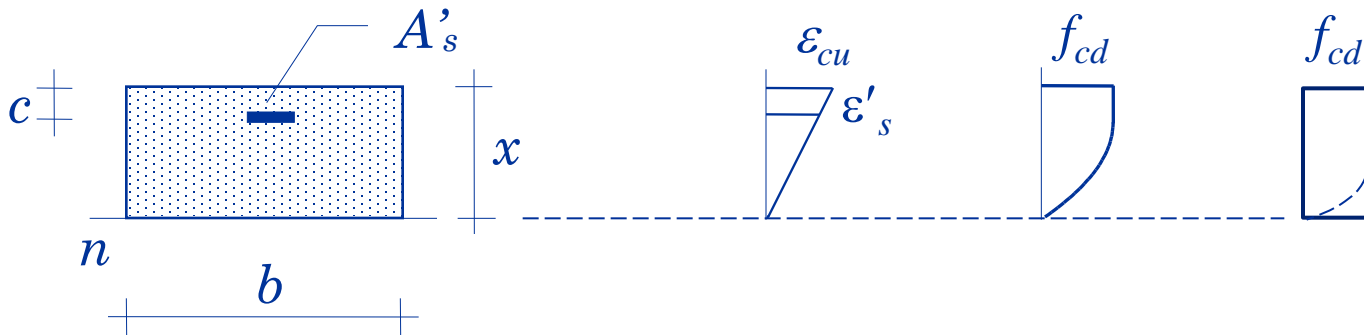


Il coefficiente β tiene conto del fatto che la tensione nella parte compressa non è costante

$$N_c = \beta b \times f_{cd}$$

β = fattore di riempimento

Il coefficiente di riempimento

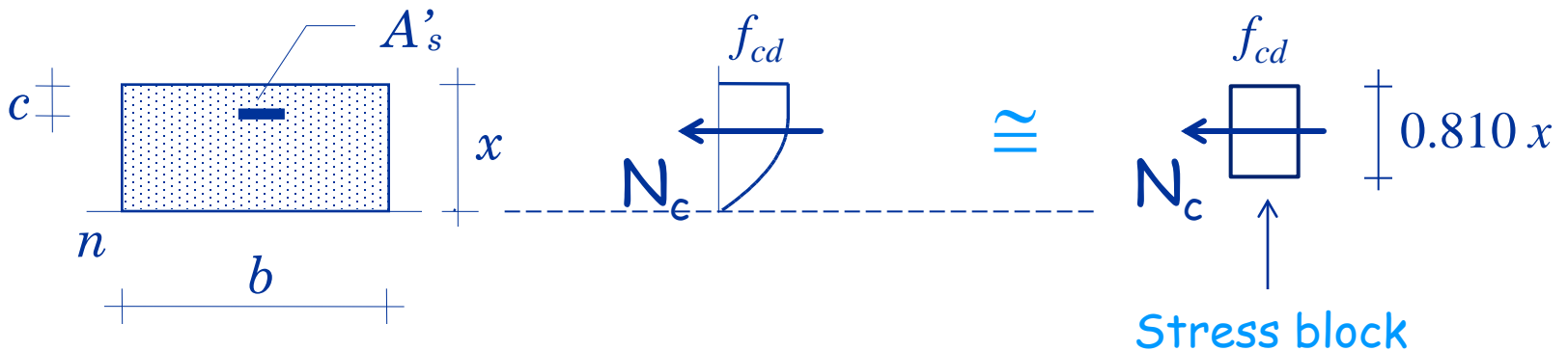


Il coefficiente β rappresenta il rapporto tra

- il volume delle tensioni agenti sulla parte compressa di calcestruzzo
- il volume delle tensioni caratterizzato da una tensione costante pari a f_{cd} su tutta la profondità dell'asse neutro:

$$\beta = \frac{\int_0^x \sigma b(y) dy}{f_{cd} \int_0^x b(y) dy}$$

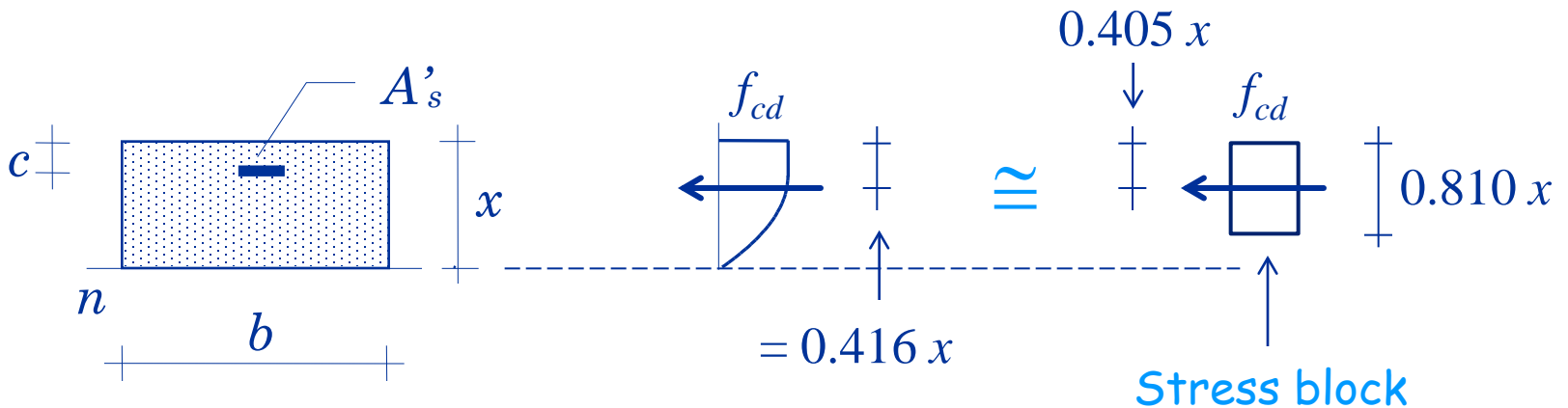
Il coefficiente di riempimento



Se la larghezza della parte compressa del cls è costante
e se la deformazione massima del cls è ε_{cu}

$$\beta = \frac{b \int_0^x \sigma dy}{f_{cd} b x} = 0.810$$

Il coefficiente di profondita`



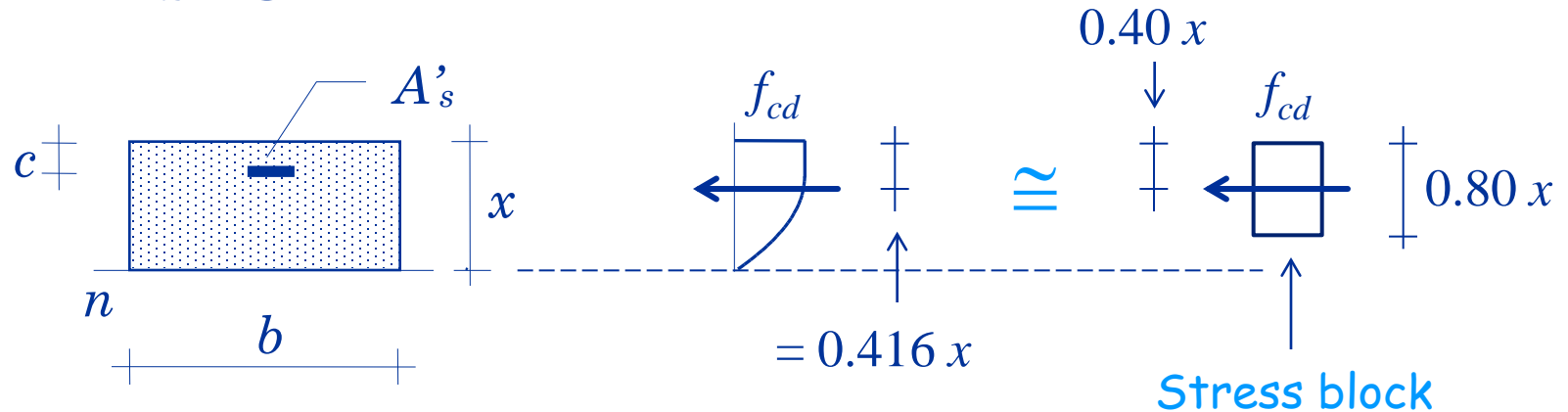
Se la larghezza della parte compressa del cls è costante
e se la deformazione massima del cls è ε_{cu}

... se si utilizza un modello "stress block" con estensione $0.810 x$,

- La distanza della risultante delle tensioni dello stress block dal bordo superiore vale $0.810 x/2$
- La posizione della risultante dello stress block è molto vicina a quella della risultante delle tensioni del diagramma parabola-rettangolo

I coeff. di riempimento e profondità`

Valori di progetto



Se la larghezza della parte compressa del cls è costante e se la deformazione massima del cls è ε_{cu}

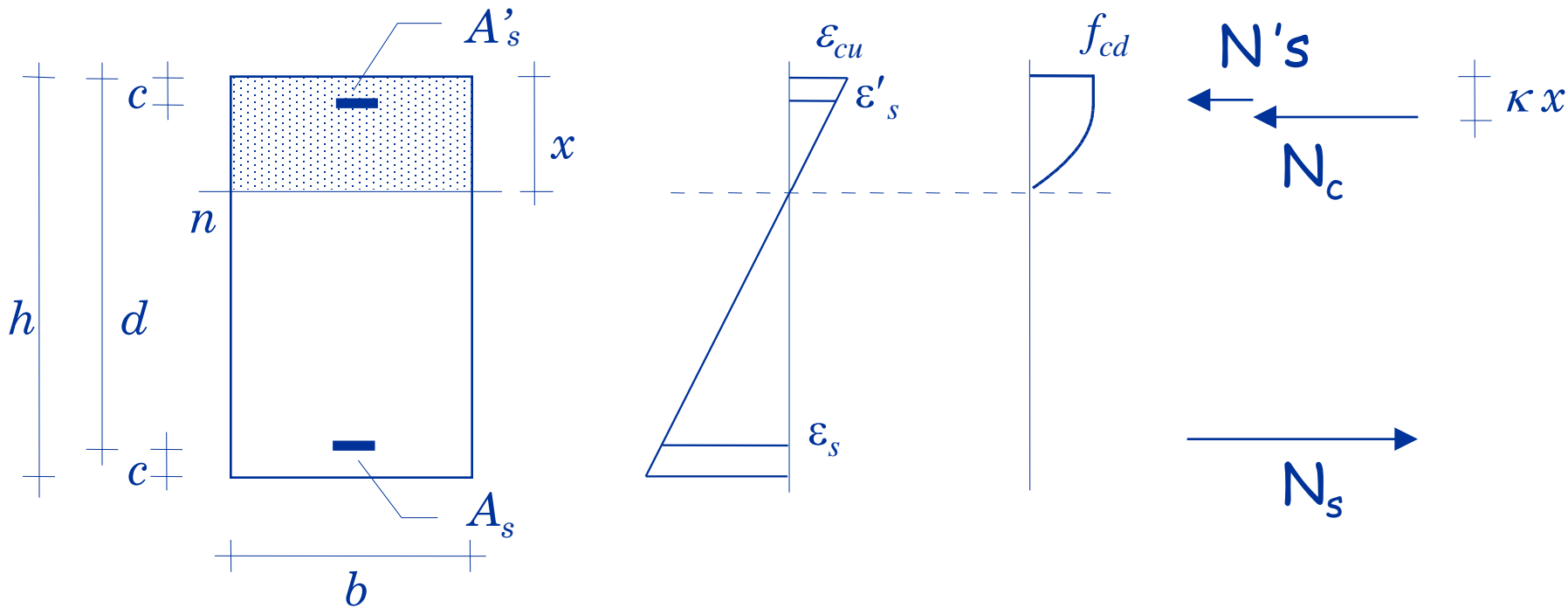
... si assume

- il coefficiente di riempimento $\beta = 0.810$ (adottati nel seguito)
- il coefficiente di profondità della risultante $\kappa = 0.416$

... o per maggiore semplicità si può assumere

- il coefficiente di riempimento $\beta = 0.80$
- il coefficiente di profondità della risultante $\kappa = 0.40$

Individuazione dell'asse neutro



$$N_c + N'_s + N_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta b x f_{cd} + A'_s \sigma'_s - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa)
la condizione di equilibrio è una equazione di primo
grado:

$$\beta b x f_{cd} + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

Individuazione dell'asse neutro

Se $\varepsilon'_s > \varepsilon_{yd}$ (o quando non vi è armatura compressa) la condizione di equilibrio è una equazione di primo grado, con soluzione:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}}$$

Individuazione dell'asse neutro

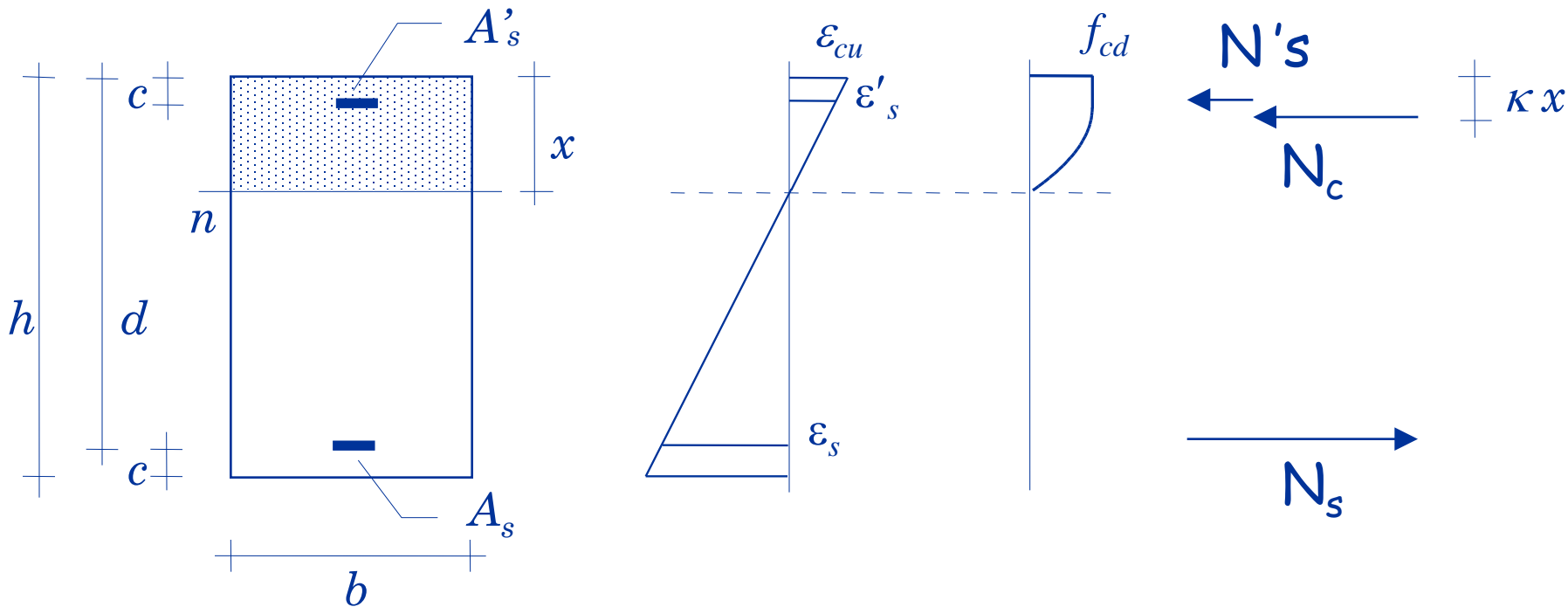
In caso contrario,
diventa una equazione di secondo grado

$$\beta b x f_{cd} + A'_s \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} - A_s f_{yd} = 0$$

con soluzione:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}}$$

Momento resistente



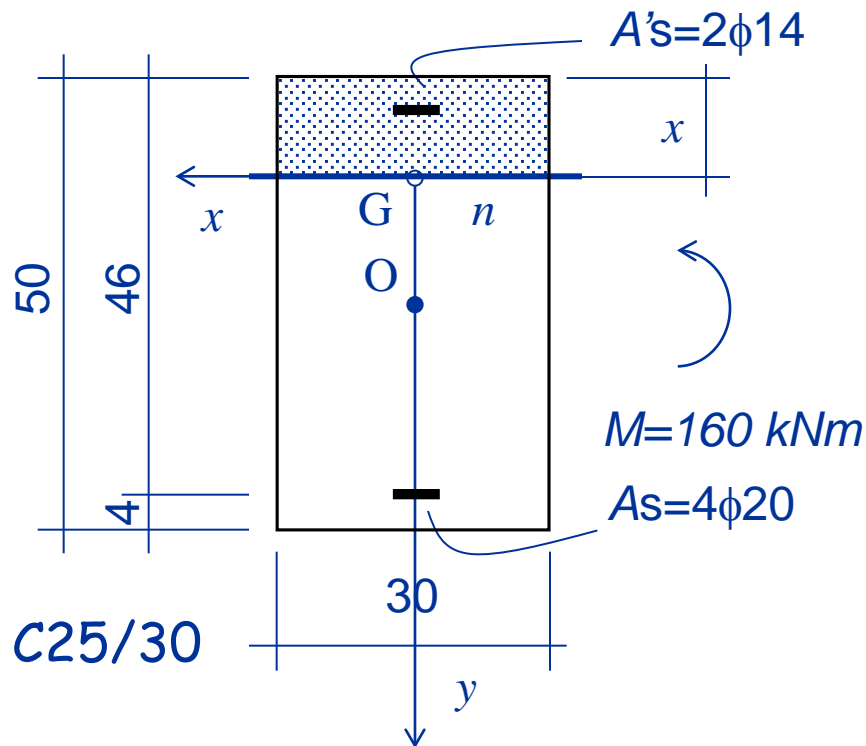
(rot. rispetto alla posiz. di N_c)

2. Calcolo del momento resistente
(rispetto a un punto qualsiasi)

$$M_{Rd} = N_s (d - \kappa x) + N'_s (\kappa x - c)$$

Esempio n. 1

3° stadio



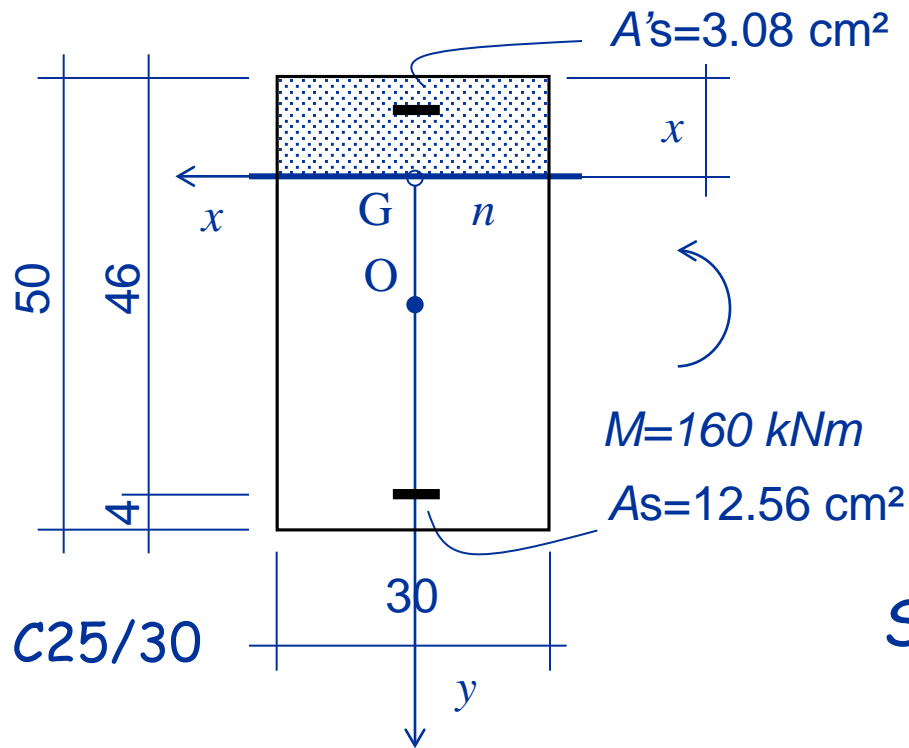
Procedura:

1. individuazione dell'asse neutro (si può ipotizzare che l'armatura compressa sia snervata, controllare se è vero e in caso contrario passare all'equazione di secondo grado)

2. Determinazione del momento resistente

Esempio n. 1

3° stadio

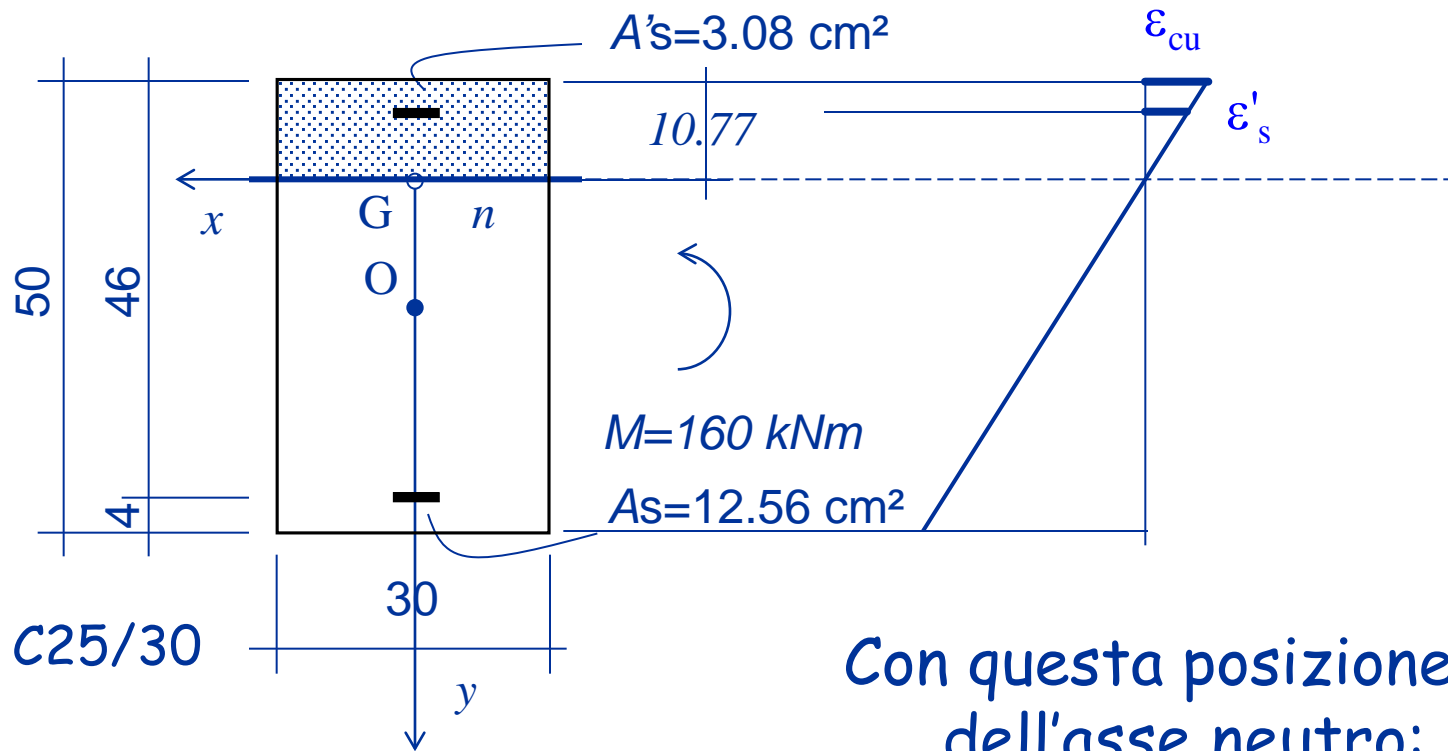


Se l'armatura compressa è snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 3.08) \times 391}{0.810 \times 30 \times 14.2} = 10.77 \text{ cm}$$

Esempio n. 1

3° stadio



Con questa posizione dell'asse neutro:

$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu} = \frac{10.77 - 4}{10.77} \times 3.5 \times 10^{-3} = 2.20 \times 10^{-3}$$

Poiché $\epsilon'_s > \epsilon_{yd}$ (1.96×10^{-3}) la posizione trovata è esatta

Esempio n. 1

3° stadio

Nota:

Ricordando che l'armatura compressa è snervata se

$$\varepsilon'_s = \frac{x - c}{x} \varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{yd}$$

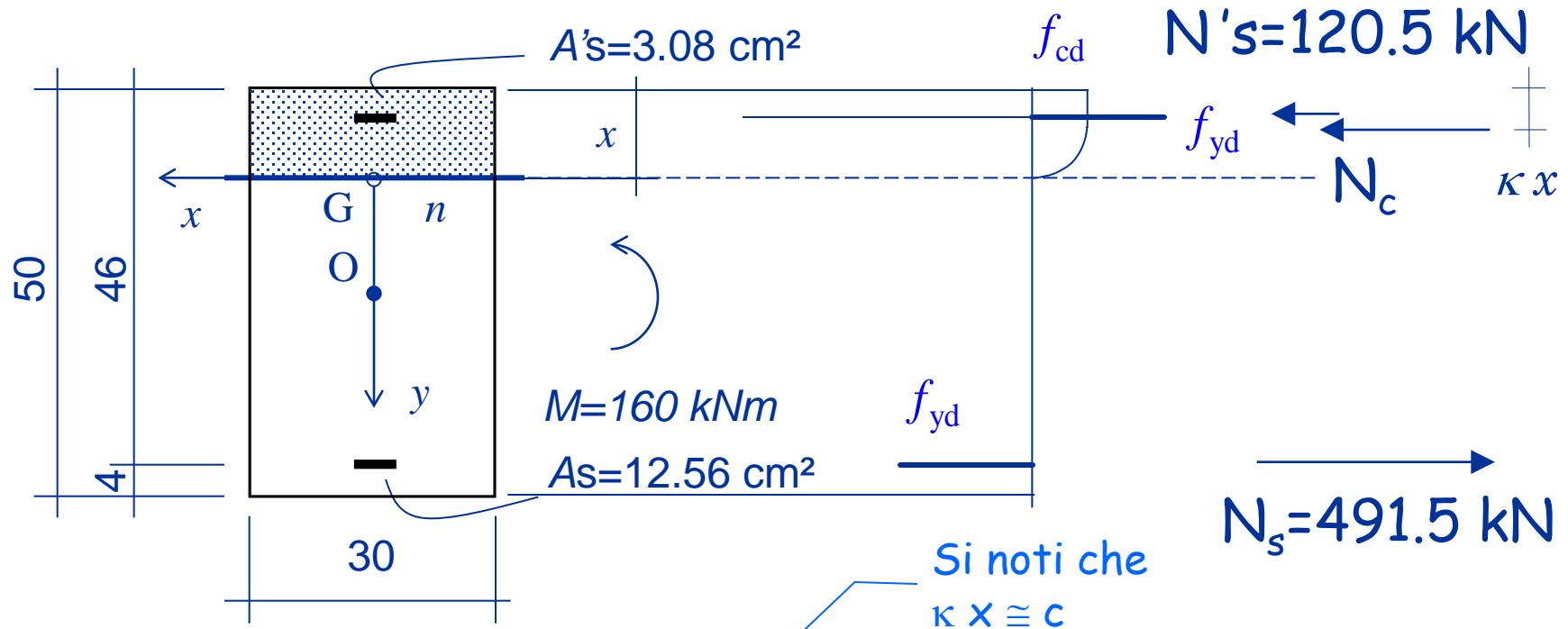
ovvero...affinché l'armatura compressa sia snervata deve essere:

$$x \geq \frac{|\varepsilon_{cu}|}{|\varepsilon_{cu}| - \varepsilon_{yd}} c = 2.27 c \quad \text{B450C}$$

Nell'esempio : $x = 10.77 \text{ cm} \geq 2.27 c = 9.08 \text{ cm}$

Esempio n. 1

3° stadio



$$M_{Rd} = N_s (d - kx) + N'_s (kx - c) = 204.6 \text{ kNm}$$

$$= [491.5 \times (46 - 0.416 \times 10.77) + 120.5 \times (0.416 \times 10.77 - 4)] \times 10^{-2}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$ la sezione è verificata

Esempio n. 2

3° stadio

Se l'armatura compressa fosse snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd}}{\beta b f_{cd}} = \frac{(12.56 - 7.82) \times 391.3}{0.810 \times 30 \times 14.17} = 5.39 \text{ cm}$$

Ma poiché la profondità dell'asse neutro è inferiore al limite minimo (2.27 c):

$$x = 5.39 \text{ cm} < 2.27 \text{ c} = 9.1 \text{ cm}$$

L'armatura compressa non è snervata e ...

Esempio n. 2

3° stadio

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.20 \text{ cm}$$

Che è inferiore al limite minimo (2.27 c):

$$x = 7.20 \text{ cm} < 2.27 c = 9.1 \text{ cm}$$

Esempio n. 2

3° stadio

... bisogna calcolare la profondità dell'asse neutro risolvendo l'equazione di secondo grado:

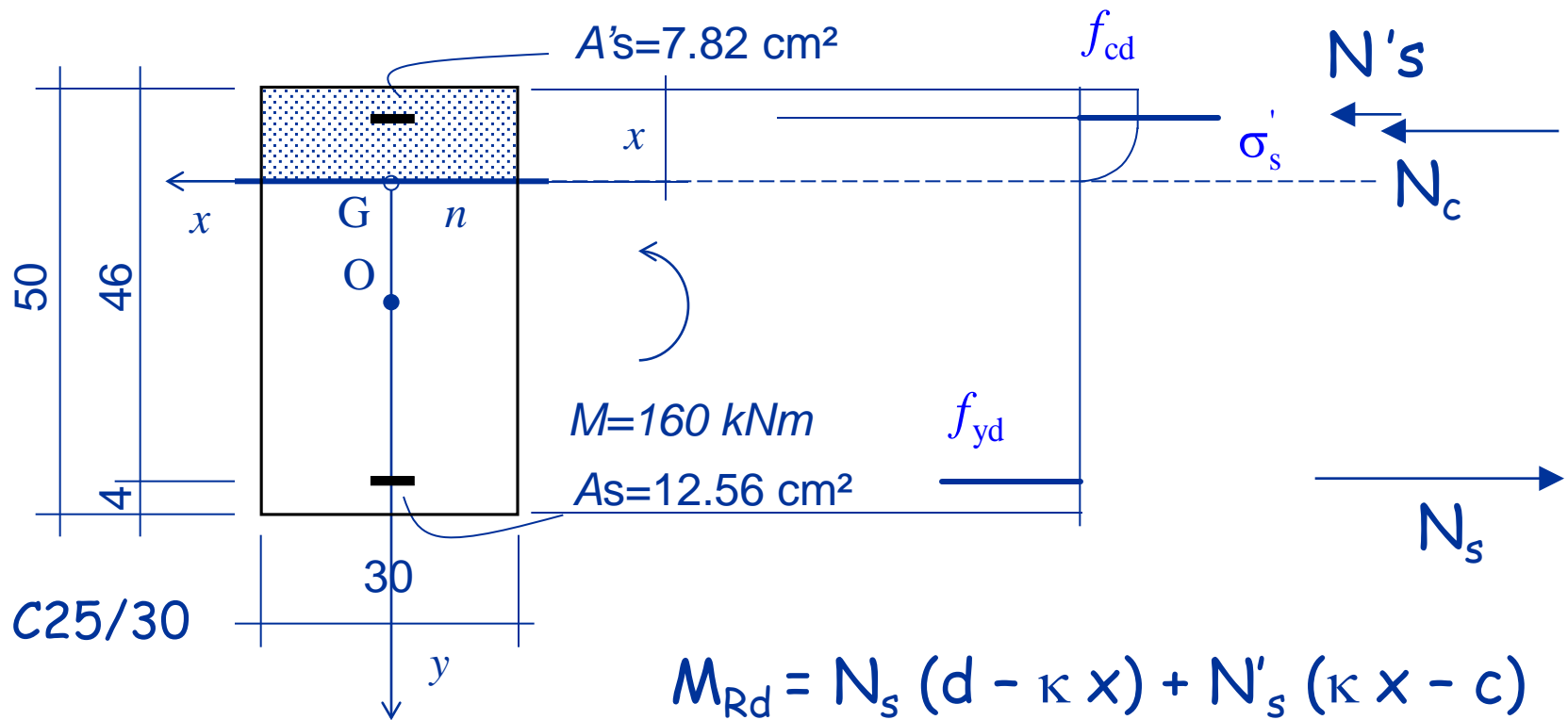
$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right) \frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} A'_s \right)^2 \left(\frac{f_{yd}}{2\beta b f_{cd}} \right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} \frac{A'_s c f_{yd}}{\beta b f_{cd}}} = 7.20 \text{ cm}$$

La tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = 311.5 \text{ MPa}$$

Esempio n. 2

3° stadio

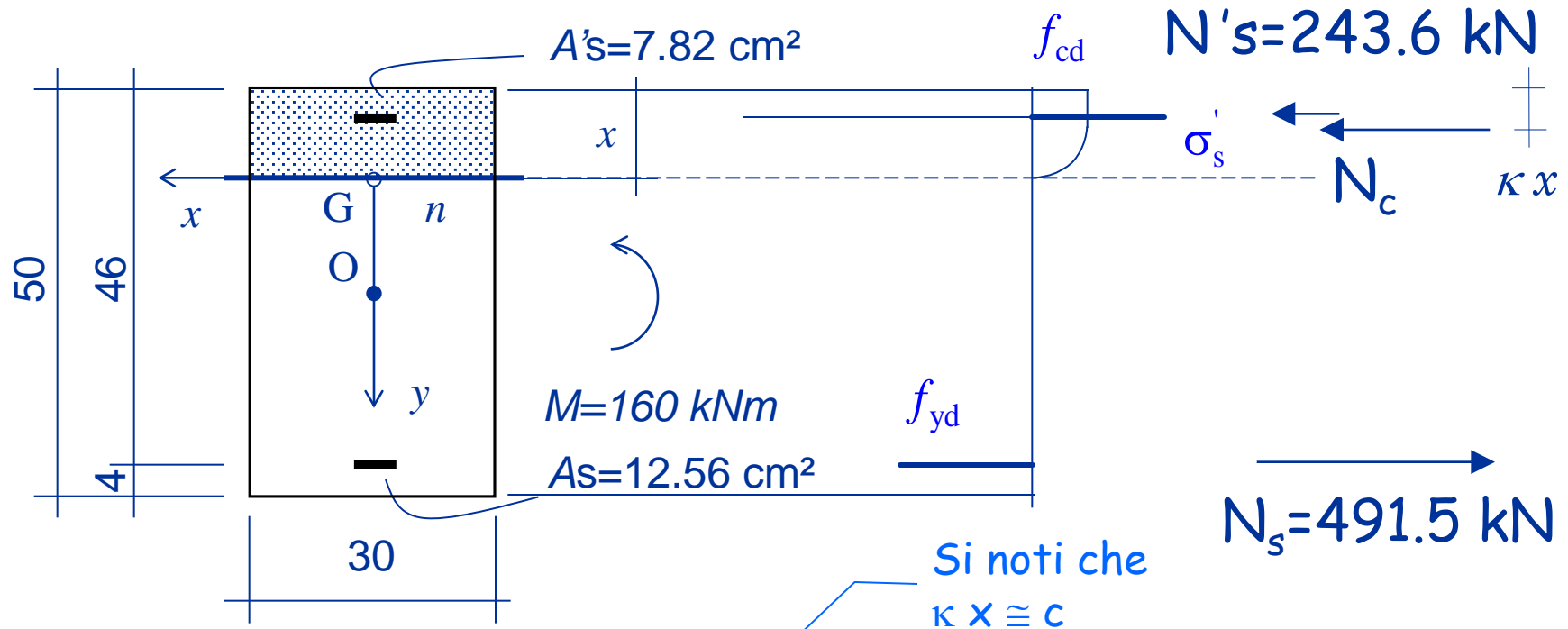


$$N_s = 12.56 \times 391.3 \times 10^{-1} = 491.5 \text{ kN}$$

$$N'_s = 7.82 \times 311.5 \times 10^{-1} = 243.6 \text{ kN}$$

Esempio n. 2

3° stadio



$$M_{Rd} = N_s (d - kx) + N'_s (kx - c) = 208.9 \text{ kNm}$$

$$= [491.5 \times (46 - 0.416 \times 7.20) + 243.6 \times (0.416 \times 7.20 - 4)] \times 10^{-2}$$

$M_{Ed} < M_{Rd}$ la sezione è verificata

Progetto di sezioni inflesse

Progetto

Duttilità della sezione

Un parametro fondamentale nel valutare il modo in cui la sezione giunge al collasso è la duttilità.

Duttilità = rapporto tra rotazione ultima e rotazione corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa

Una sezione che presenti una rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo

In zona sismica la capacità di deformarsi plasticamente permette di dissipare con cicli isteretici

Duttilità della sezione

Esempio

Sezione 30x50

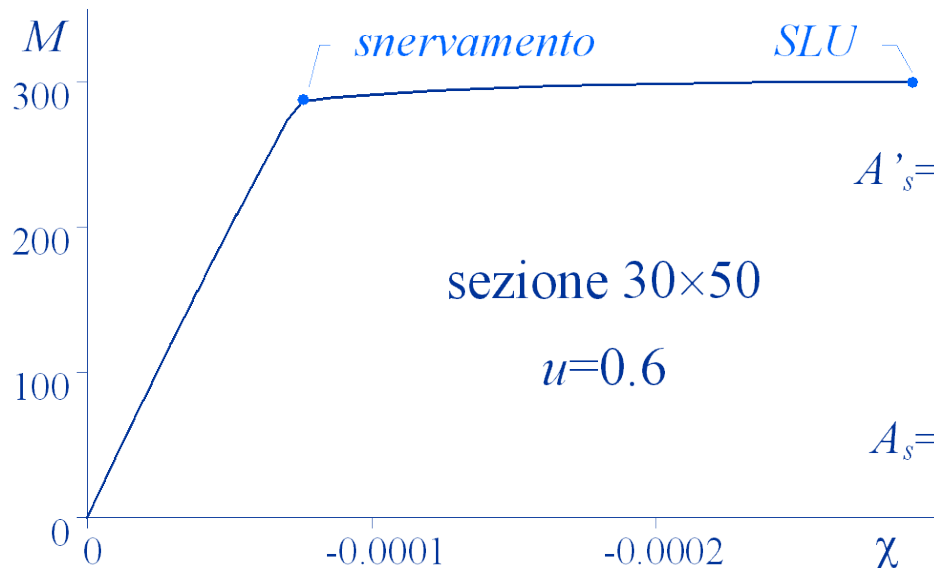
$$u = A'_s / A_s = 0.6$$

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

$$\varepsilon_{su} > 10 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 11.0 \text{ cm}$$

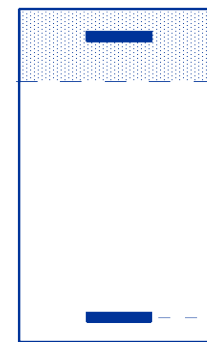
$$\chi_u = -0.000286$$



Buona duttilità

$$A'_s = 11.5 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 19.2 \text{ cm}^2$$



$$\varepsilon_c = -0.0035$$

$$x = 11.0 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_s = 0.0110$$

Duttilità della sezione

Esempio

Sezione 30x50

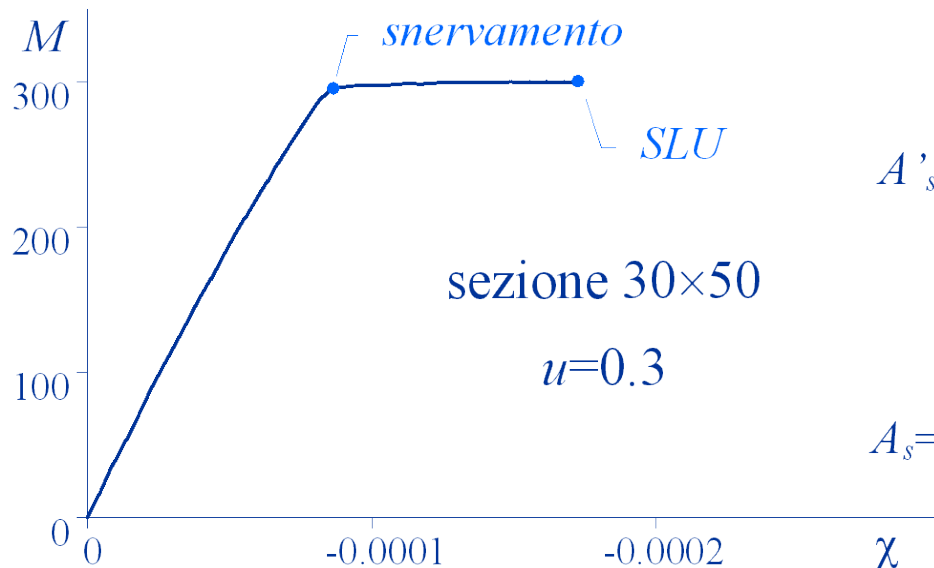
$$u = A'_s / A_s = 0.3$$

$$M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

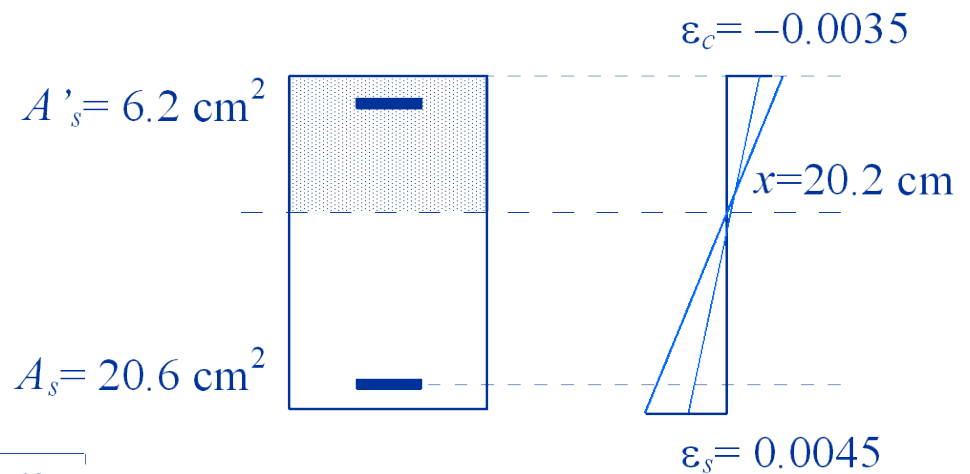
$$\varepsilon_{su} = 4.5 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 20.2 \text{ cm}$$

$$\chi_u = -0.000184$$



Duttilità discreta



Duttilità della sezione

Esempio

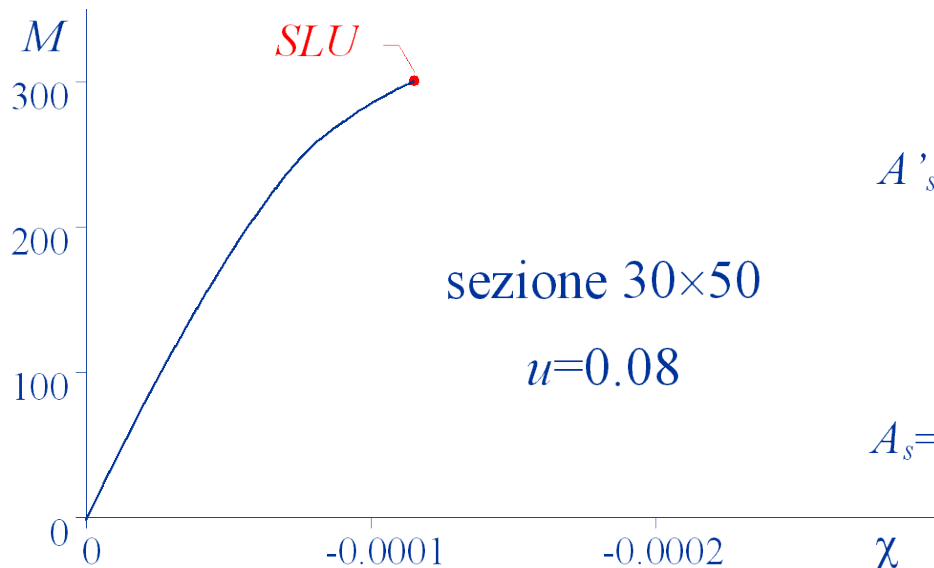
Sezione 30x50

$$u = A'_s / A_s = 0.08 \quad M_{Rd} = 300 \text{ kNm}$$

$$\varepsilon_{su} = 1.8 \times 10^{-3}$$

$$x_u = 30.3 \text{ cm}$$

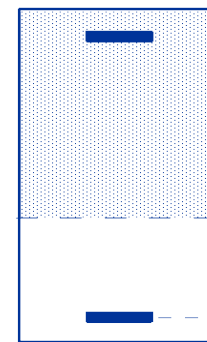
$$\chi_u = -0.000116$$



Bassa duttilità

$$A'_s = 1.9 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 23.5 \text{ cm}^2$$



$$\varepsilon_c = -0.0035$$

$$x = 30.3 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_s = 0.0018$$

Duttilità della sezione

- Le sezioni con minore armatura sono più duttili
- La duttilità cresce con la deformazione ε_s dell'armatura tesa allo SLU

Possiamo classificare le sezioni inflesse:

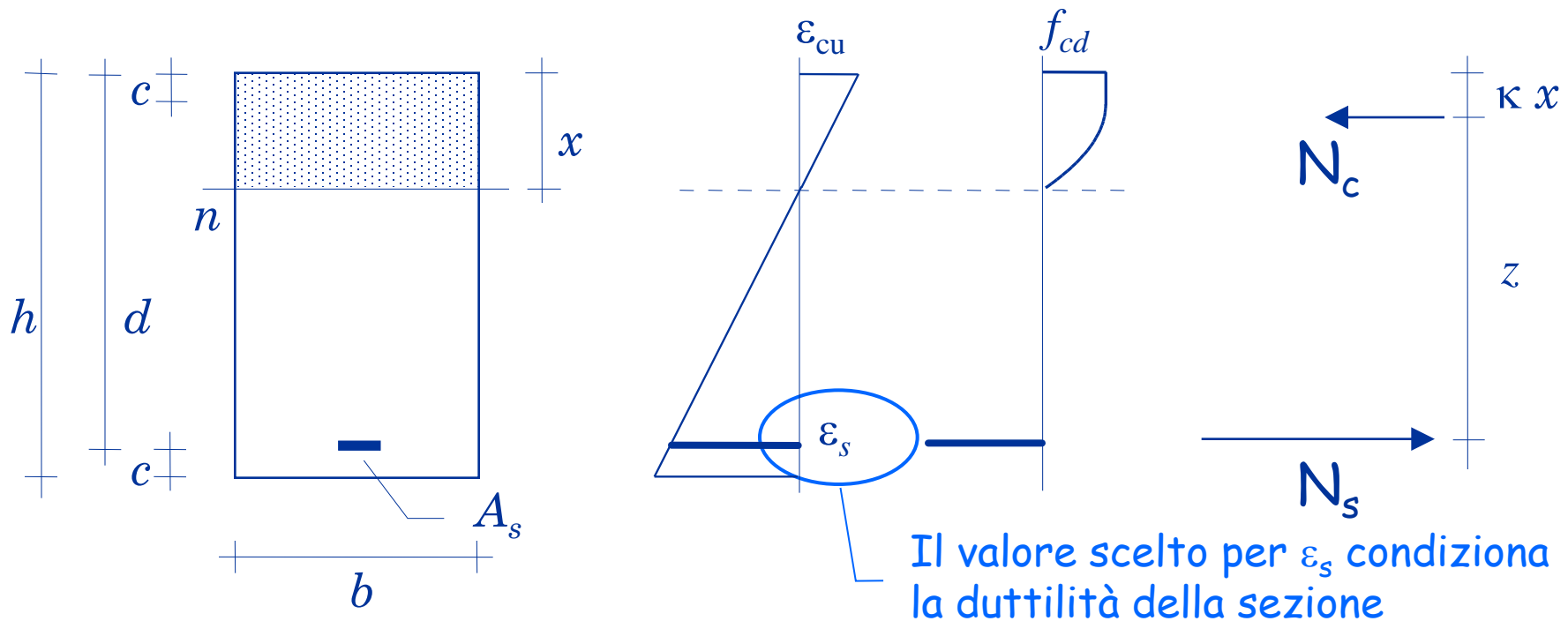
- ad alta duttilità se $\varepsilon_s \geq 0.010$
- a media duttilità se $\varepsilon_{yd} < \varepsilon_s < 0.010$
- a bassa duttilità se $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}$

Per ottenere sezioni duttili in c.a.

le progetteremo sempre assumendo $\varepsilon_s \geq 0.010$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo

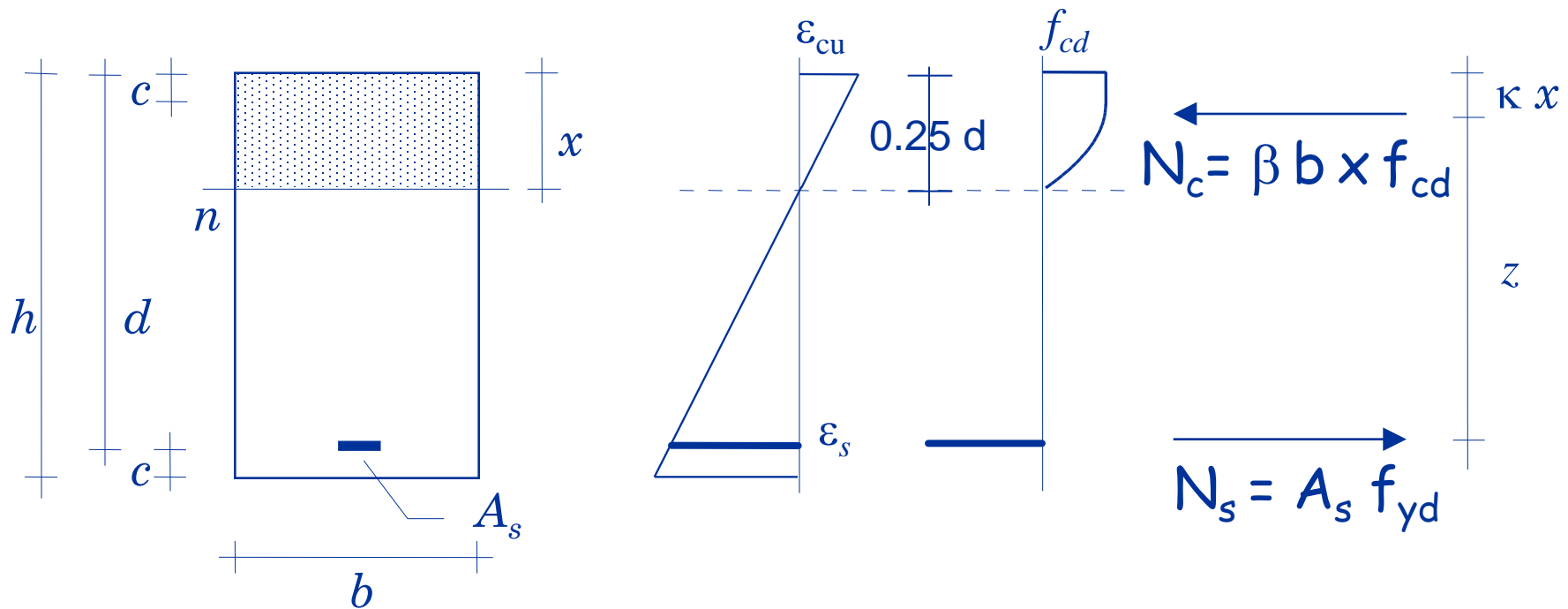


1. Si assegna il diagramma di deformazioni che si vuole avere nella sezione

Buona duttilità con $\epsilon_{su} \cong 10 \times 10^{-3}$... oppure $x=0.25 d$

Progetto (caso semplice armatura)

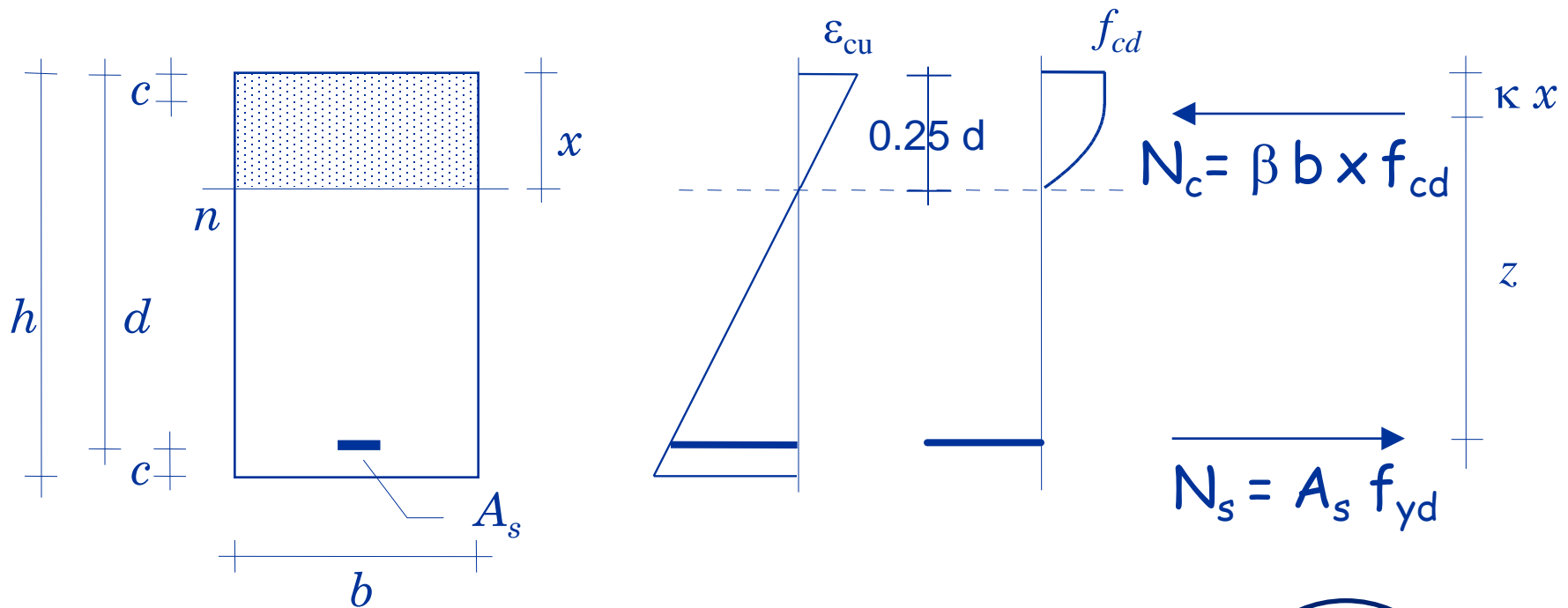
Stato limite ultimo



2. Dall'equilibrio alla rotazione rispetto alla risultante delle trazioni si ha:

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



$$z = d - \kappa x = d(1 - \kappa \xi)$$

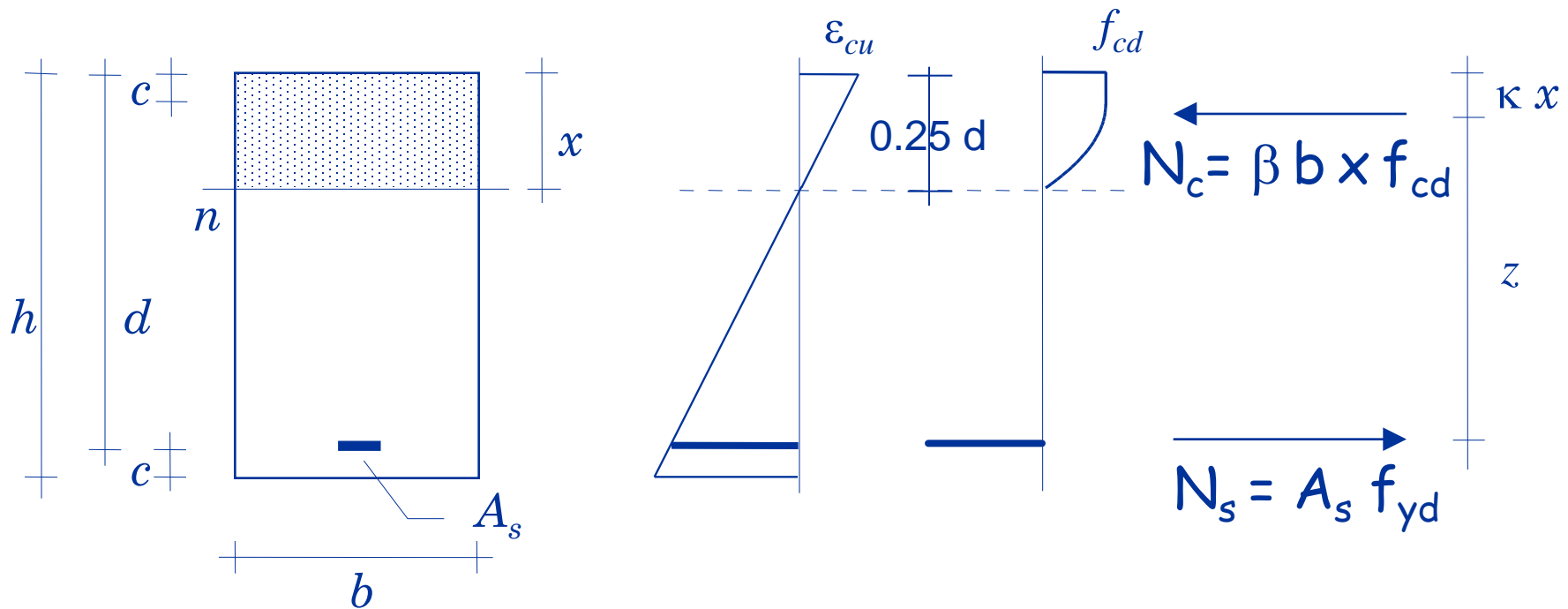
e

$$M_{Rd} = N_c z = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}$$

Nota
 $\xi = x/d$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



Se si pone:

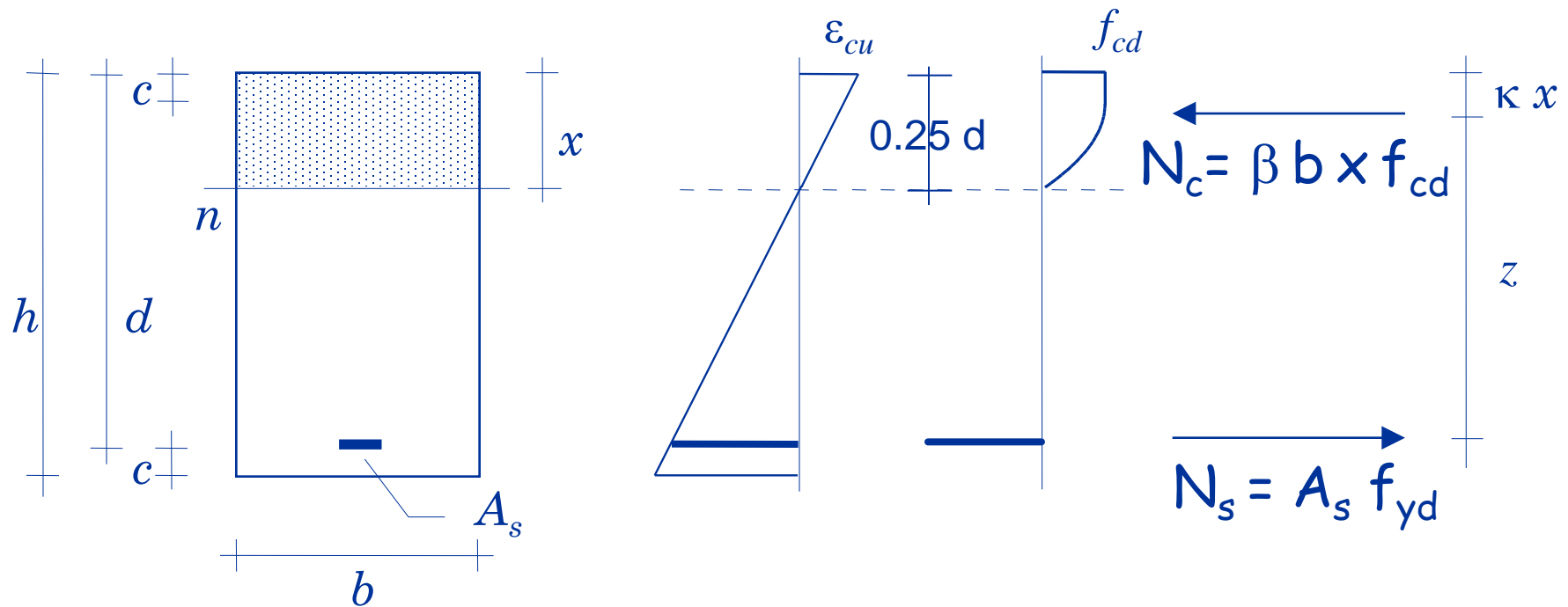
$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

La precedente
relazione diventa:

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo

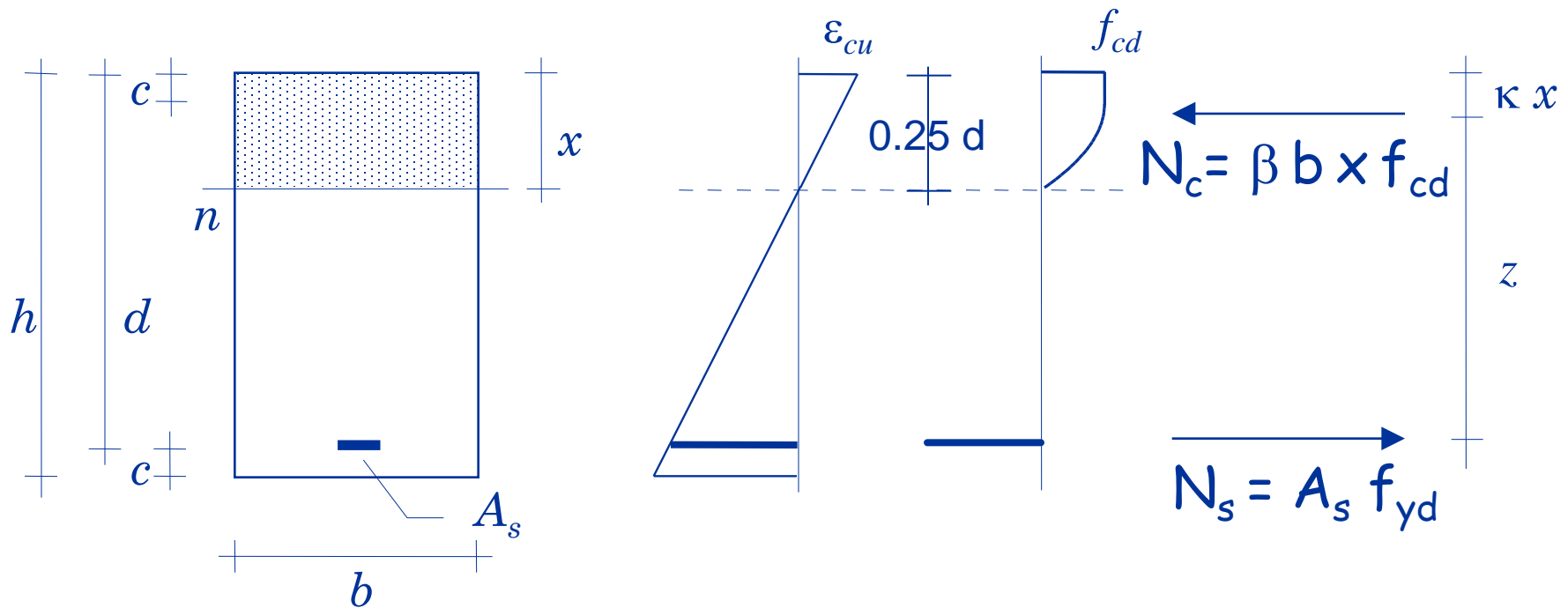


3. Dall'equil. alla rotazione rispetto alla risultante di compressione si ha

$$M_{Rd} = N_s z = A_s d (1 - \kappa \xi) f_{yd}$$

Progetto (caso semplice armatura)

Stato limite ultimo



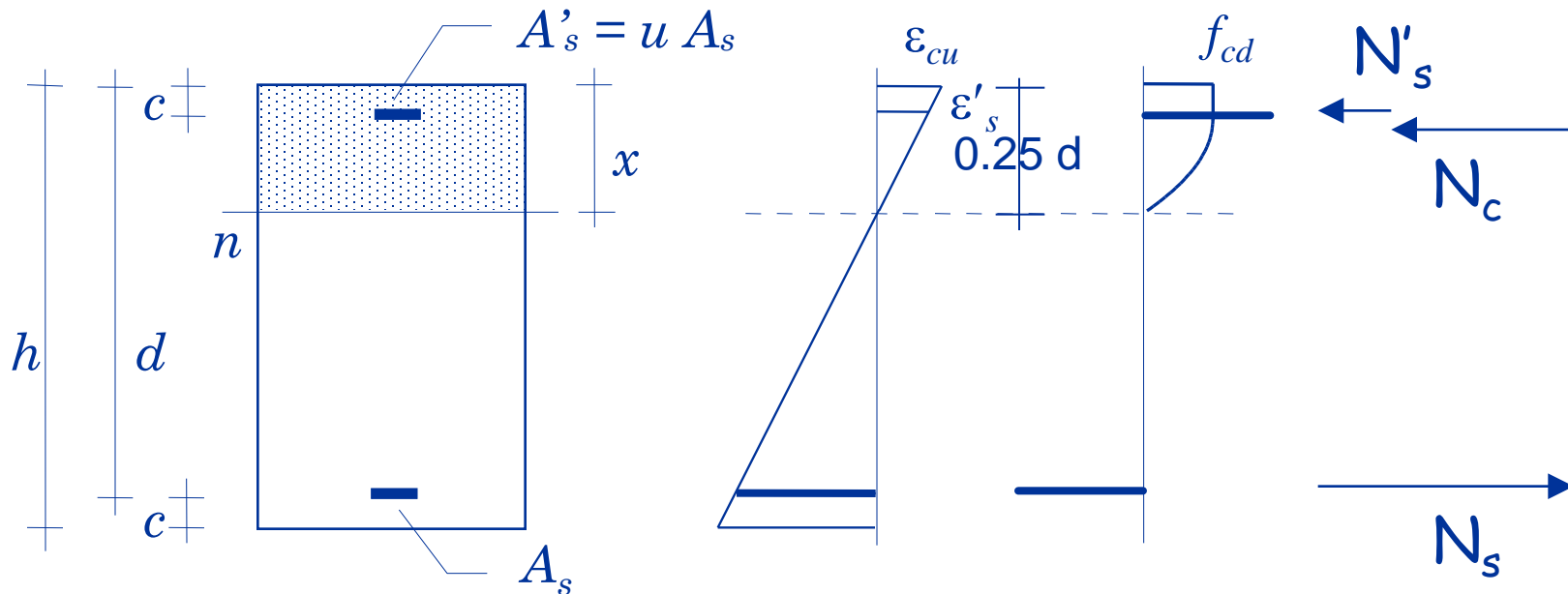
$$(1 - \kappa \xi) \cong 0.9$$

pertanto...

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}}$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

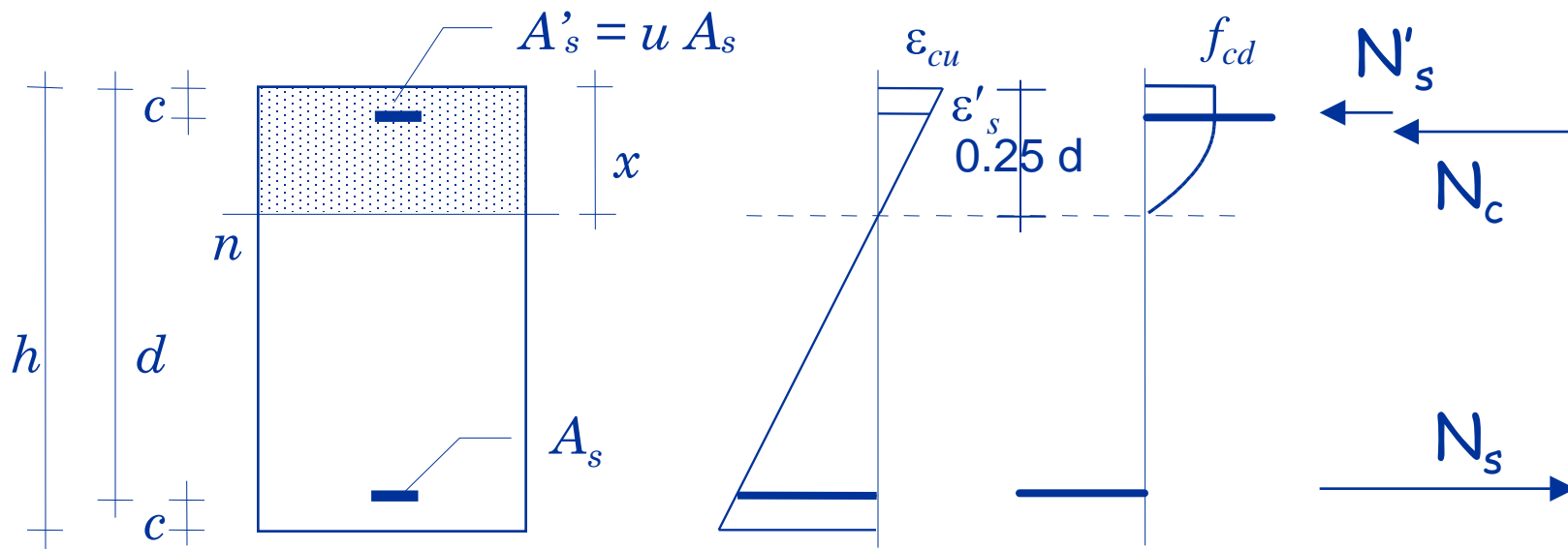


Se poniamo $u = \frac{A'_s}{A_s}$ e $s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}}$

$$N'_s = A'_s \sigma'_s = u A_s (-s' f_{yd}) = -s' u N_s$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



se l'arm. compressa è snervata

$$s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = 1$$

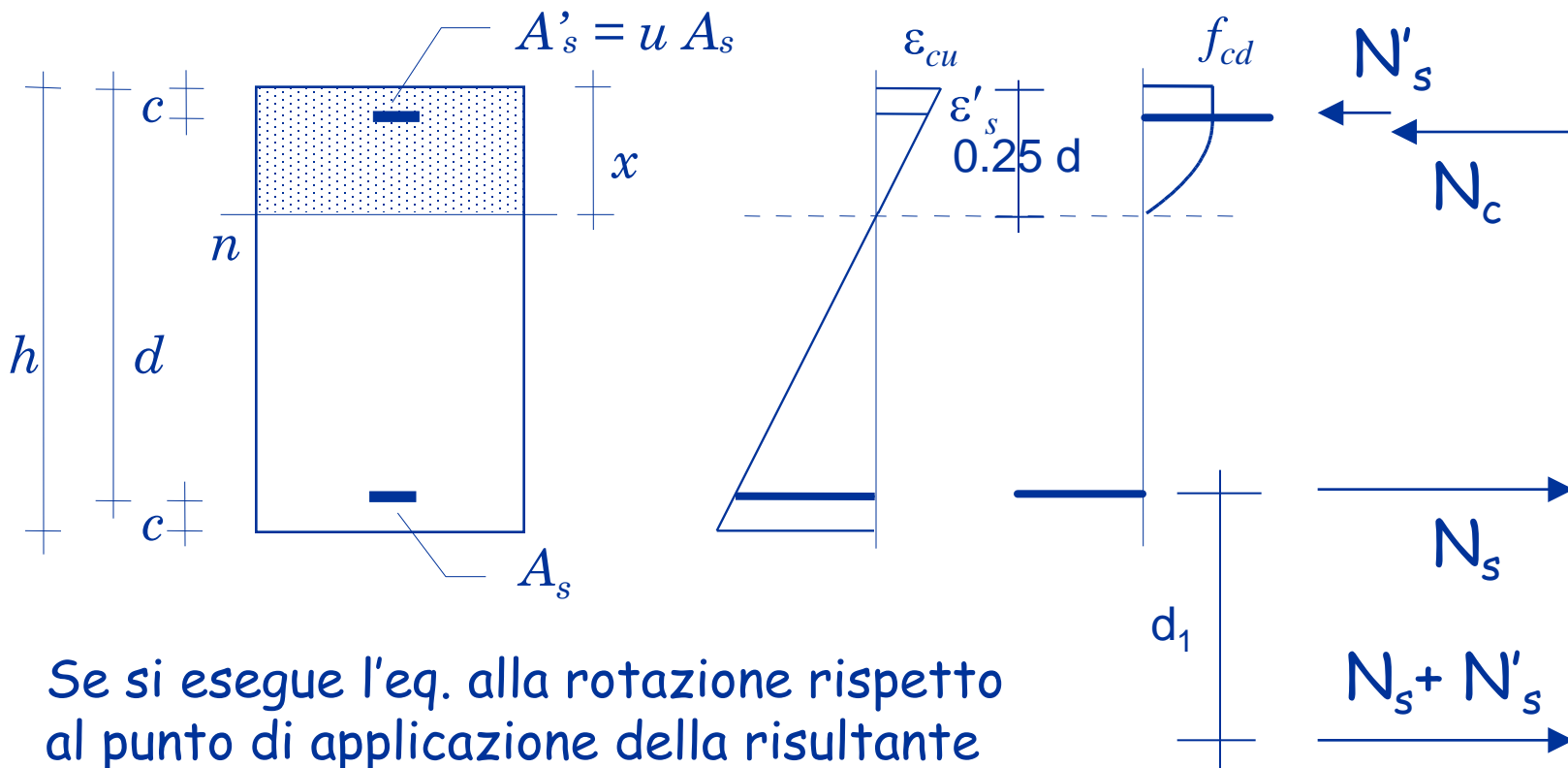
... in caso contrario

$$s' = \frac{-\sigma'_s}{f_{yd}} = \frac{x - c}{x} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} = \frac{\xi - \gamma}{\xi} \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}}$$

L'armatura compressa (acciaio B450C) è snervata se $\gamma \leq 0.11$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



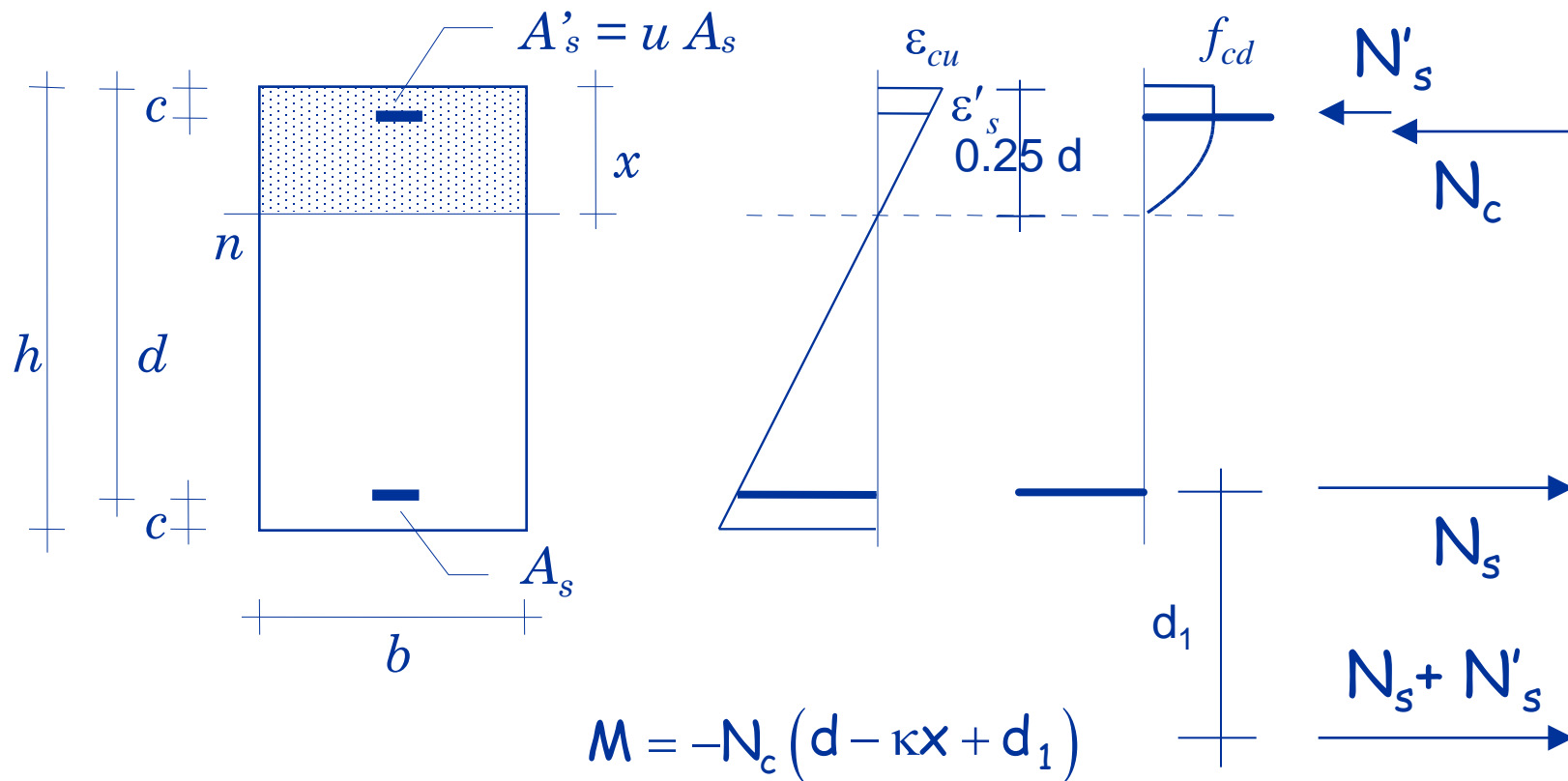
Se si esegue l'eq. alla rotazione rispetto al punto di applicazione della risultante delle tensioni delle armature, si ha:

$$-N'_s (d - c + d_1) = N_s d_1 \quad \text{ovvero}$$

$$d_1 = \frac{s'u(1-\gamma)}{1-s'u} d$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



$$M = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd} \left[1 + \frac{s' u}{1 - s' u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo

$$M = b d^2 \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd} \left[1 + \frac{s'u}{1 - s'u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

$$M = b d^2 \frac{1}{r^2}$$

dove

$$\frac{1}{r^2} = \beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}$$

$$\frac{1}{k^2} = \left[1 + \frac{s'u}{1 - s'u} \frac{1 - \gamma}{1 - \kappa \xi} \right]$$

Che relazione c'è tra r ed r' ?

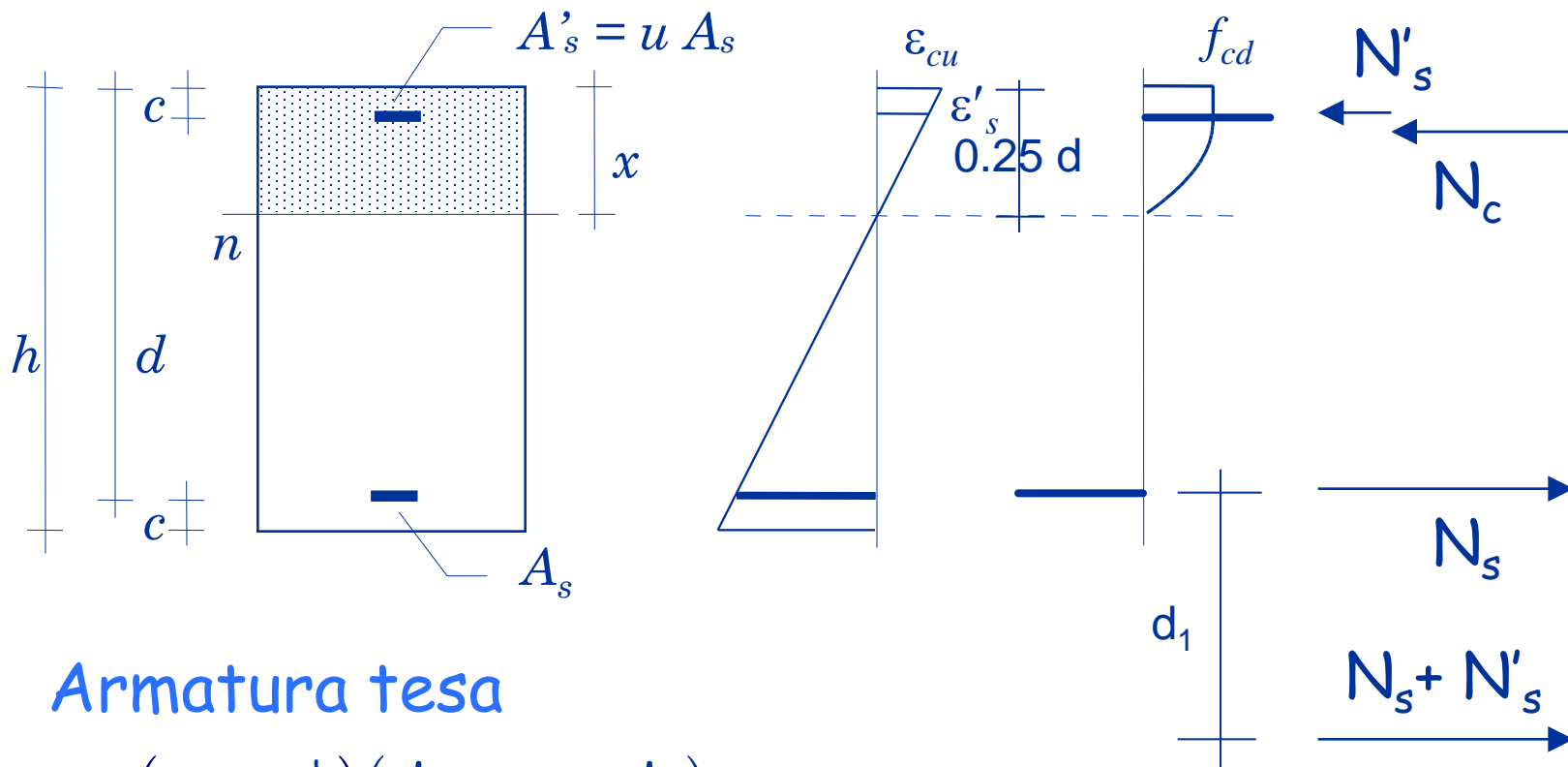
$$r' \cong r \sqrt{1 - s' u} \quad \text{con} \quad s' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_{s,\max}} \quad u = \frac{A'_s}{A_s}$$

Si noti che s' dipende principalmente dal copriferro c (o meglio, dal rapporto $\gamma = c/d$)

Nota: per SLU s' è molto spesso pari a 1 (è minore solo per travi a spessore)

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



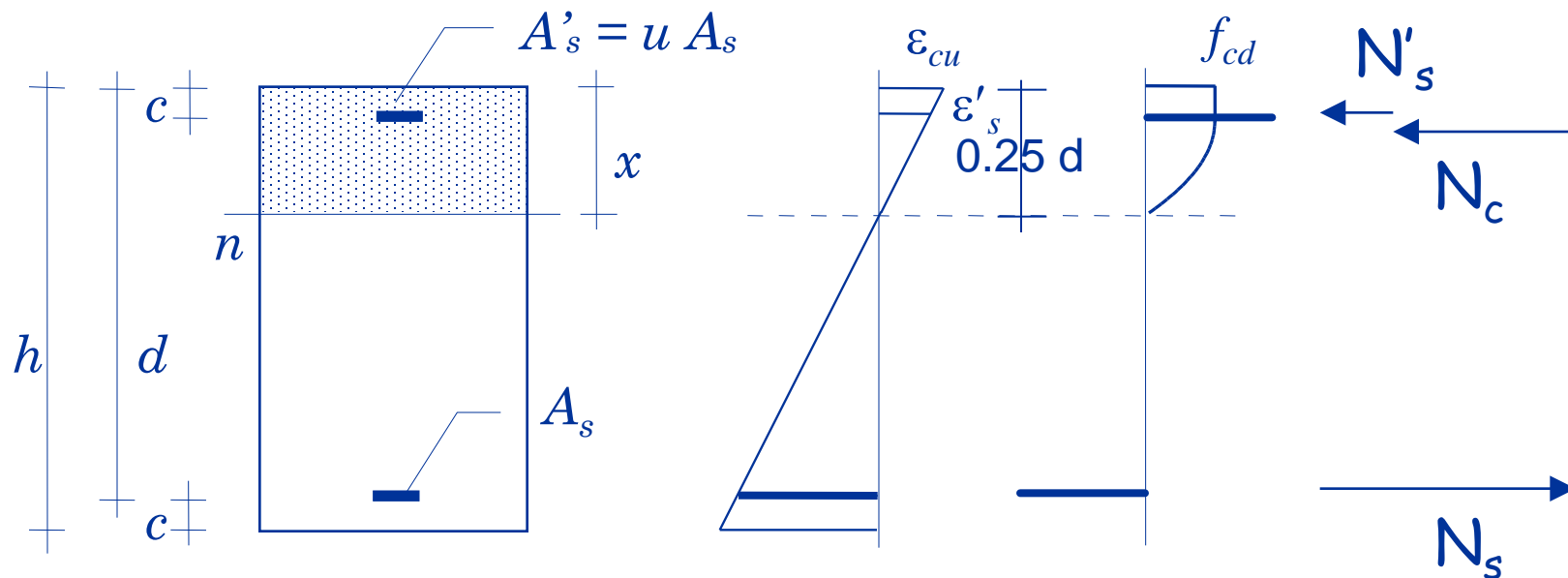
Armatura tesa

$$M = (N_s + N'_s)(d - \kappa x + d_1)$$

$$M = A_s f_{yd} [1 - \kappa \xi + s' u (\kappa \xi - \gamma)] = A_s f_{yd} z \cong A_s f_{yd} 0.9 d$$

Progetto (caso doppia armatura)

Stato limite ultimo



Armatura compressa

$$\Delta M = M_{Ed} - M_{Rd, A'_s=0} \quad \Rightarrow \quad A'_s = \frac{\Delta M}{(d - c) s' f_{yd}}$$

Valori di z/d (C25/30, B450C)

Sezioni progettate con $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ e $\xi = 0.25$

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	0.896		
0.25	0.897	0.888	0.887
0.50	0.898	0.880	0.879

Sempre molto prossimo a 0.9

Quanto vale il coefficiente r?

$$r = \frac{1}{\sqrt{\beta \xi (1 - \kappa \xi) f_{cd}}}$$

Stato limite ultimo:
dipende solo dal calcestruzzo

per C25/30:

$$r = 0.0197$$

Valori di r' (C25/30, B450C)

	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	0.0197		
0.25	0.0171	0.0180	0.0189
0.50	0.0139	0.0160	0.0181

Nota: $\gamma = 0.10$ per travi emergenti
 $\gamma = 0.20$ per travi a spessore

Valori di r'/r (C25/30, B450C)

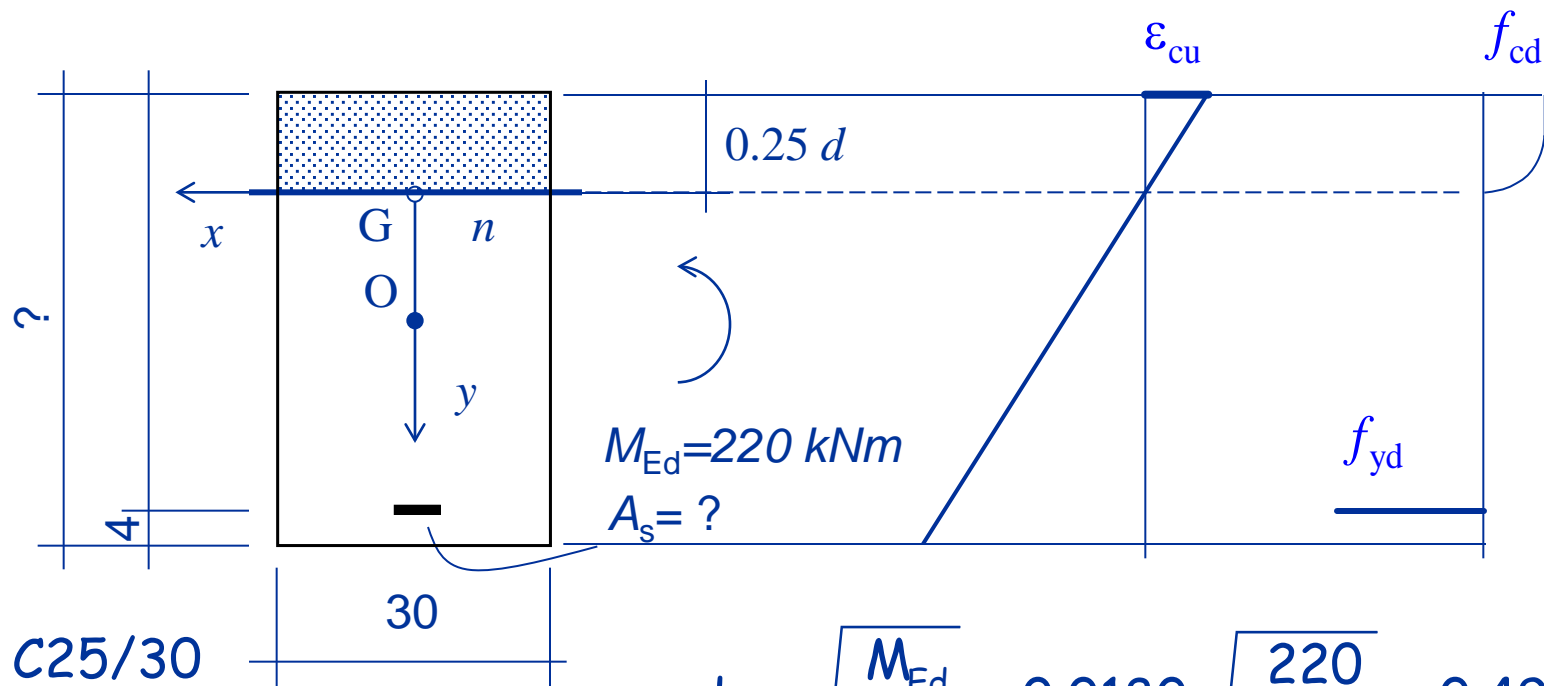
	$\gamma = 0.10$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.20$
u	$s' = 1.00$	$s' = 0.72$	$s' = 0.36$
0	1.000		
0.25	0.868	0.913	0.0959
0.50	0.706	0.812	0.919

Travi
emergenti

Travi a
spessore

Esempio n. 1

Progetto di sezione rettangolare



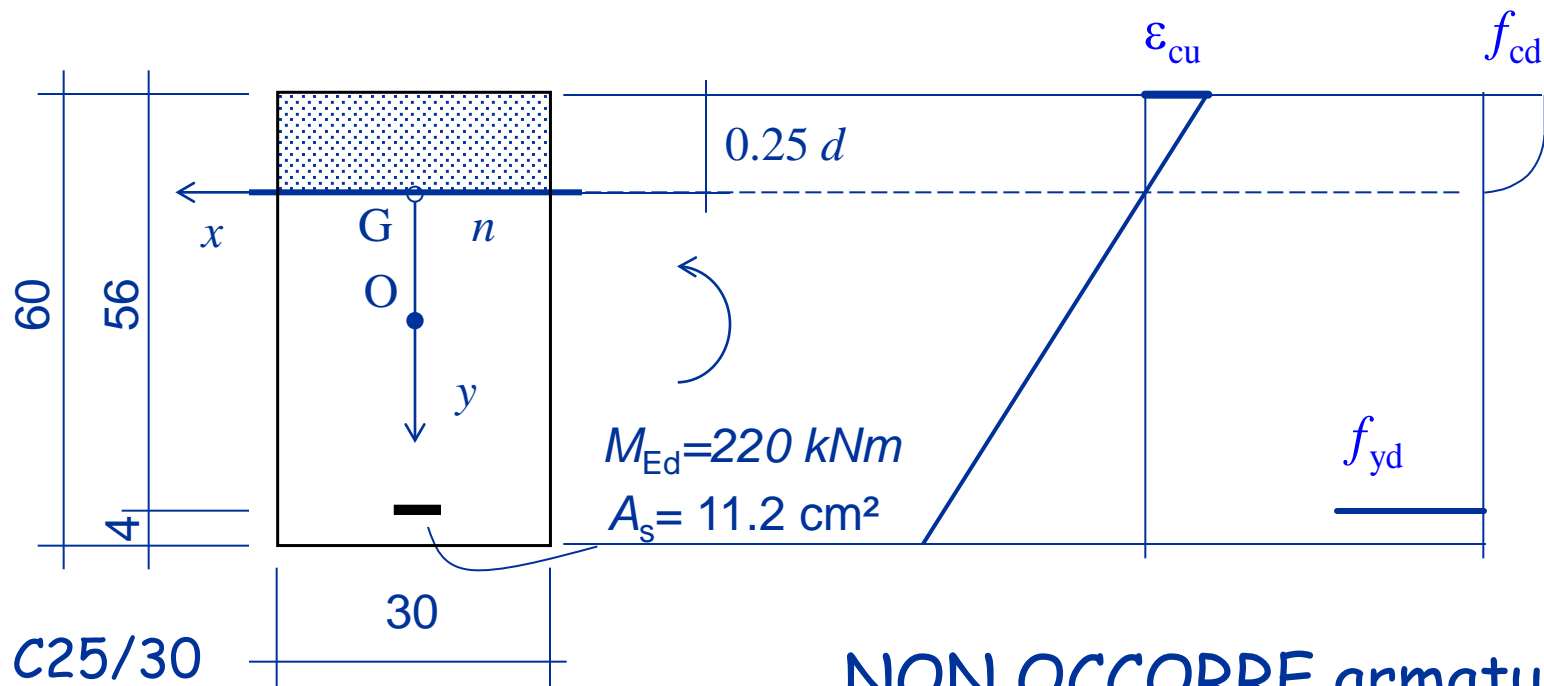
$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0180 \sqrt{\frac{220}{0.30}} = 0.49 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{220 \times 10}{0.9 \times 0.56 \times 391.3} = 11.2 \text{ cm}^2$$

uso 30x60

Esempio n. 1

Progetto di sezione rettangolare

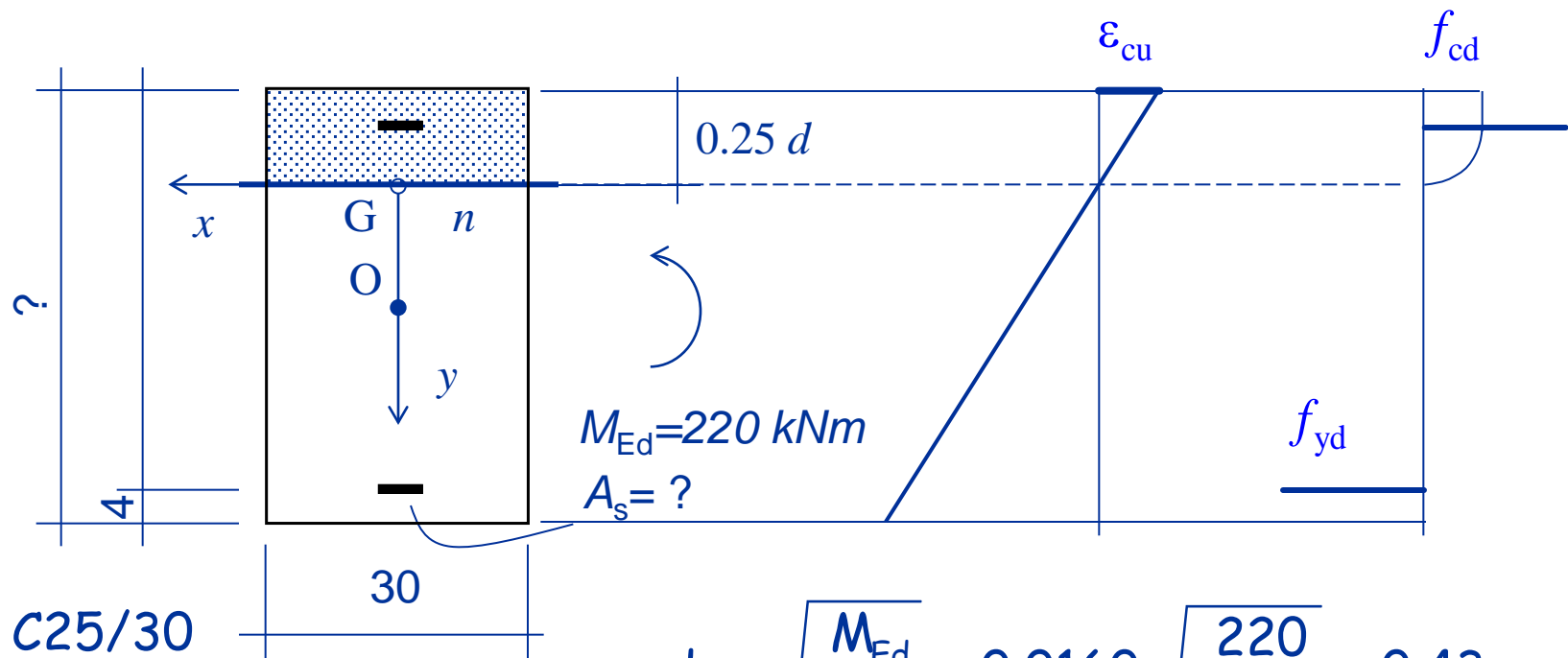


NON OCCORRE armatura a compressione

$$M_{Rd, A'_s=0} = \frac{bd^2}{r^2} = \frac{0.30 \times 0.56^2}{0.0197^2} = 242.4 \text{ kNm}$$

Esempio n. 2

Progetto di sezione a doppia armatura



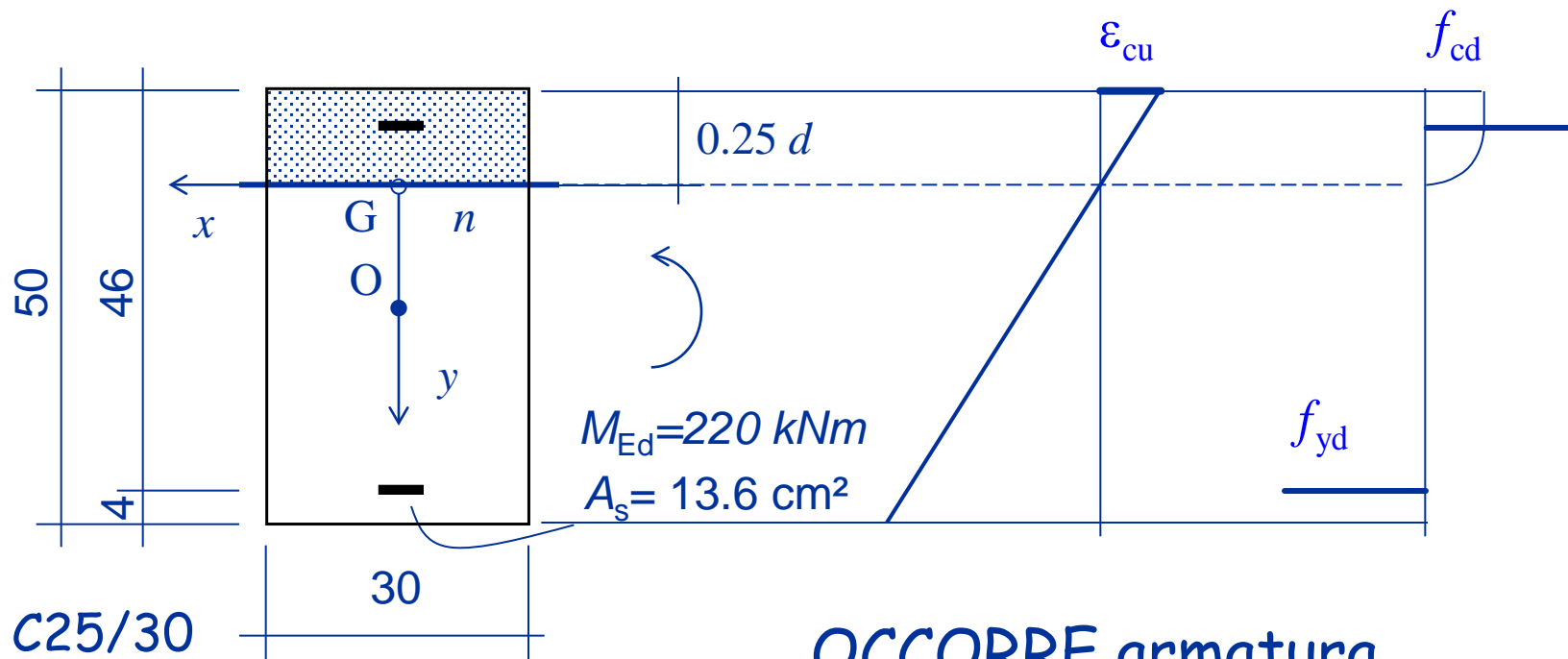
$$d = r \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} = 0.0160 \sqrt{\frac{220}{0.30}} = 0.43 \text{ m}$$

$$A_s = \frac{M}{0.9 d f_{yd}} = \frac{220 \times 10}{0.9 \times 0.46 \times 391.3} = 13.6 \text{ cm}^2$$

uso 30x50

Esempio n. 2

Progetto di sezione a doppia armatura

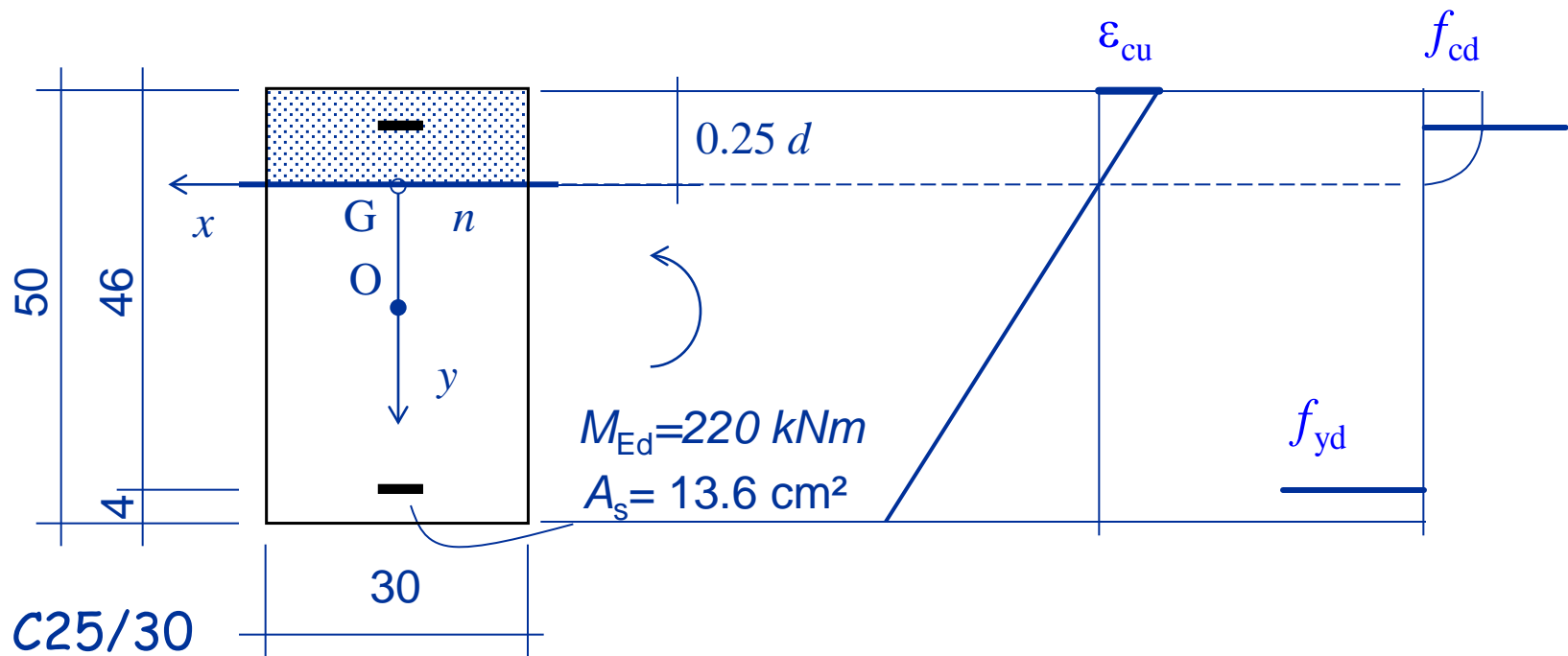


OCCORRE armatura
a compressione

$$M_{Rd, A'_s=0} = \frac{bd^2}{r^2} = \frac{0.30 \times 0.46^2}{0.0197^2} = 163.6 \text{ kNm}$$

Esempio n. 2

Progetto di sezione a doppia armatura



$$A'_s = \frac{\Delta M}{(d - c) s' f_{yd}} = \frac{(220 - 163.6)}{0.42 \times 391.3} = 3.4 \text{ cm}^2$$

Quanto è possibile ridurre la sezione grazie all'armatura compressa?

- Aumentando $u = A'_s/A_s$ è possibile ridurre l'altezza della sezione
- Riducendo l'altezza aumenta l'armatura necessaria
- Necessità tecnologiche impongono limiti alla quantità di armatura (ribaditi dalla normativa)

Armatura minima:

$$A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b d \geq 0.13 \% b d$$

0.15% per C25/30 e B450C

Armatura massima:

$$A_s \leq 4 \% b h$$

$$A'_s \leq 4 \% b h$$

Percentuale massima consigliata: 1 ÷ 1.5%

Limiti alle formule di progetto

per tener conto dei limiti all'armatura

Imponendo un limite all'armatura tesa:

$$A_s \leq \rho b d \quad \text{con } \rho = 0.010 \div 0.015$$

Si ha:
$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0.9 d f_{yd}} \leq \rho b d$$

E quindi:

$$d \geq r_s \sqrt{\frac{M_{Ed}}{b}} \quad \text{con} \quad r_s = \sqrt{\frac{1}{0.9 \rho f_{yd}}}$$

= 0.0169
se $\rho=0.010$
= 0.0138
se $\rho=0.015$

Non si può utilizzare un valore di r' inferiore a r_s

Suggerisco per r' un limite tra 0.015 e 0.017

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto della sezione assumere un valore
 $r' = 0.018$ o 0.017

(corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)

Per travi molto basse (a spessore) assumere valori
un po' maggiori

$r' = 0.019$ (corrisponde a $0 < u < 25\%$ per C25/30)

Se si ritiene accettabile una percentuale di armatura
dell'1.5% si può scendere al valore

$r' = 0.015$ (ma non andare mai al di sotto di questi)

Criteri di buona progettazione (SLU)

Per il progetto dell'armatura tesa considerare un braccio della coppia interna pari a $0.9 d$

Nota:

Per sezioni a forte armatura (sconsigliate per la carenza di duttilità) il braccio della coppia interna dovrebbe essere minore ($0.8 d$)

FINE