Skąd się bierze ½ we wzorze at^2? – kognitywistyczna lekcja kinematyki

„Skąd się bierze ½ we wzorze $s = ½\ at^2$?" – pyta Karolina, studentka trzeciego roku fizyki, i dodaje: „większość moich kolegów też tego nie rozumie".

Grzegorz **Karwasz**

„Ratujmy kinematykę" – pisze w numerze 4/2015 Waldemar Reńda [1]. Dla dydaktyka fizyki są to bardzo dobre głosy: dydaktyka zajmuje się identyfikacją problemów w przyswajaniu wiedzy i daje recepty, jak te problemy rozwiązywać. Widocznie ½ we wzorze Galileusza jest takim problemem. Odpowiemy na to pytanie na kilku stopniach trudności, stosując metodą konstruktywistyczną i doświadczalną [2].

I. Poziom podstawowy

Banalny pozornie problem stwarza różnorodne możliwości dydaktyczne. Oczywiście można podać gotowy wzór $s = s_0 + v_0t + ½\ at^2$ i „kazać" uczniowi się go nauczyć, ale byłaby to nie dydaktyka, lecz dogmatyka fizyki. Wzór pochodzi od Galileusza i pojawia się po raz pierwszy w *Dialogu o dwóch największych systemach – ptolemeuszowym i kopernikowym*. We wzorze nie pojawia się ½, a sam opis wzoru jest dość zawiły [3]:

„Ale to stwierdzenie ogólne nie ma żadnej wartości, jeśli nie wiadomo, w jakich proporcjach rośnie prędkość, wniosek nieznany aż do naszych czasów dla wszystkich filozofów, a odkryty i wykazany przez Akademika, naszego wspólnego przyjaciela, który w niektórych swoich rękopisach, jeszcze nieopublikowanych, a pokazanych w zaufaniu mnie i niektórym swoim przyjaciołom, wykazuje, jak przyspieszenie ruchu prostoliniowego spadających ciał odbywa się w porządku kolejnych liczb nieparzystych, to znaczy zaznaczywszy, jakie i ile równych czasów chcemy, jeśli w pierwszym czasie, ruszając ze stanu spoczynku, przebędzie określony odcinek, na przykład długość lufy, w drugim czasie trzy lufy, w trzecim pięć, w czwartym siedem, i tak sukcesywnie w porządku kolejnych liczb głupawych [nieparzystych], co w sumie jest tym samym, co powiedzieć, że odcinki przebyte przez ciało, ruszając ze spoczynku, mają się do siebie w proporcji podwójnej w stosunku do czasów, w jakich te odcinki są mierzone, lub możemy powiedzieć, że odcinki przebyte mają się do siebie jak kwadraty czasów" (tłum. G. Karwasz).

Dziś po włosku nie mówi się liczby „głupawe" (*numeri caffi*), ale liczby nieparzyste. Wzór Galileusza ilustruje równia pochyła, odtworzona w pracowni Zakładu Dydaktyki Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu (fot. 1). Wzdłuż tej równi o długości 5 m zawieszone zostały dzwonki o coraz wyższej wysokości tonu, w odległościach względnych 1 : 3 : 5 : 7 : 9. I tu pojawiają się dwie drogi dydaktyczne. Pierwsza, tradycyjna, to puszczenie kulki po równi i obserwowanie, że dzwonki dźwięczą w równych odstępach czasu mimo różnych odległości. Podobnie można pokazać spadek nakrętek nanizanych na sznurek w proporcjonalnych odległościach. Niezupełnie jest to jednak droga konstruktywistyczna.

Fot. 1. Rekonstrukcja równi pochyłej Galileusza w pracowni Zakładu Dydaktyki Fizyki UMK, zob. [4]

Droga kognitywistyczna, poznawcza, to doświadczenie przeprowadzone w ciemnościach. W dużej sali wykładowej 200–300 gimnazjalistów śledzi wykład o mechanice, cały czas mając przed oczyma równię z dzwonkami. W pewnym momencie gaśnie światło i w zupełnej ciemności, na hasło „start!" wybranego ucznia, kula zaczyna się staczać (zob. film [4]). Pytanie, jakie zadajemy, gdy kula już stuknie o podłogę, to: „W jakich odległościach wiszą dzwonki?". Niezawodnie w 200-osobowej sali padają odpowiedzi: „W równych!". Powtarzamy doświadczenie, nadal po ciemku, aby potwierdzić odpowiedź. Trzeci raz spuszczamy kulę już przy zapalonym świetle. Zdziwienie jest powszechne! (Nie powtarzamy dalej tego doświadczenia. Jak mawiał wybitny przedwojenny pedagog prof. Kazimierz Sośnicki: „Nadmiar poglądowości prowadzi do infantylności").

Fizyka jest nauką doświadczalną, ale przy tym matematyczną. Potrzebny jest pomiar! Wybieramy ucznia o wzroście mniej więcej 150 cm, co odpowiada długości buta około 27 cm. Chłopiec zdejmuje but, inny uczeń liczy długości, a trzeci zapisuje je na tablicy. Niezwykle ważny jest ten podział ról, dokładny pomiar, a także natychmiastowy zapis. 27 cm to akurat odcinek „1"

a)

b)

Fot. 2. Interaktywna procedura pomiarowa w doświadczeniu z równią: a) odległości między dzwonkami sprawdzamy butem mierniczym: 1 stopa, 3 stopy, 5 stóp... (należy wybrać ucznia, który ma około 140 cm wzrostu, tak aby but miał mniej więcej 28 cm); b) bardzo precyzyjnie rozdzielamy zadania: jeden uczeń mierzy, drugi zlicza, trzeci zapisuje (fot. K. Służewski)

na naszej równi (zob. fot. 2). Dokonując niezbędnych zaokrągleń (i powtórzeń pomiaru), bez trudu dochodzimy do wzoru „1 : 3 : 5", a resztę, „7 : 9", pozostawiamy do obserwacji widowni. Mamy więc wzór Galileusza, ale droga do $\frac{1}{2}at^2$ jeszcze daleka. Potrzebna jest kolejna naoczna obserwacja dokonana przez widownię.

Do tej kolejnej „naoczności" wykorzystamy wiedzę uczniów. Korzystając z ich zainteresowań, dostępności technologii wykorzystywanych w sportach motorowych, pasji motoryzacyjnych młodych Polaków i transmisji telewizyjnych, zadajemy pytanie żargonem młodzieżowym: „W ile sekund ferrari przyspiesza do stówy? W siedem?". Słyszymy odpowiedź: „Nie! W siedem to beemka mojego brata!". „A ferrari w ile?" – krakowskim targiem uznano, że w trzy. Jest to istotne dla ułatwienia obliczeń. Stówa nie zamienia się łatwo w metry na sekundę, ale 108 km/h już tak. Jest to 30 m/s. Na razie nie mówimy uczniom, że odpowiada to przyspieszeniu 10 (m/s)/s.

Zapisujemy na tablicy odcinek czasu podzielony na trzy części, podpisujemy: „1, 2, 3". Pytamy: „Jak przyspiesza ferrari? Prawda, że ma pydę wciśniętą do dechy?". W języku fizyki oznacza to, że silnik samochodu w fazie startu, niezależnie od wartości obrotów silnika, zachowuje stały moment siły wyrażony w N·m. Inteligentny sprzedawca w salonie samochodowym umiejętnie podkreśli dużą niezależność momentu siły silnika od prędkości obrotowej w silnikach nowej generacji (= kompetencja społeczna w nauczaniu fizyki). Dla młodzieży jednak lepiej pozostać przy „pydzie" – bez trudu przyjmą założenie o stałości przyspieszenia w trakcie startu ferrari. Możemy więc na tablicy dopisać, że w momencie czasu „= 1 s" prędkość samochodu wyniosła 10 m/s, w momencie czasu „= 2 s" była równa 20 m/s.

Pytamy: „Jaką drogę przebyło ferrari w ciągu pierwszej sekundy?". Nieuniknioną odpowiedzią jest: „Dziesięć metrów!". Gdyby odpowiedź z sali była inna, oznaczałoby to, że uczniowie nie myślą, ale zgadują. Oczywiście jest to odpowiedź błędna, ale świadcząca o kontakcie nauczyciela z klasą. Czekamy na inne odpowiedzi. W grupie kilkudziesięciu gimnazjalistów pojawi się wcześniej czy później odpowiedź: „Pięć metrów". Jeśli nie, naprowadzamy na nią uczniów.

Pytamy: „Jaką prędkość ma ferrari w ciągu pierwszej sekundy?". Pada odpowiedź: „Dziesięć?". „Nie! bo startowało od zera". Stąd już tylko krok (cały czas wybrany uczeń notuje wszystko na tablicy) do zapisania, że w ciągu pierwszej sekundy samochód przebył drogę 5 m.

Pierwsza sekunda – prędkość średnia: 5 m/s; droga: 5 m.

Dalsze kroki są już dość łatwe.

Druga sekunda – prędkość na początku tej sekundy: 10 m/s, prędkość na końcu tej sekundy: 20 m/s, średnia prędkość w drugiej sekundzie: 15 m/w; droga przebyta w drugiej sekundzie: 15 m.

Trzecia sekunda – itd.

Zsumowanie: 5 + 15 + 25 = 45, czyli ½ z 90 m. Postawiona przez nauczyciela hipoteza robocza (= najistotniejsza cecha odróżniająca naukowca odkrywcę od wyrobnika) brzmi: $s = \frac{1}{2}at^2$, gdzie $t = 3$ s (teraz już moment czasu, a nie interwał). Należy też wyjaśnić, że przez a oznaczyliśmy, „o ile rośnie prędkość ferrari w ciągu jednej sekundy". „Jak mówiliśmy, możemy przyjąć, że ten przyrost prędkości jest od startu mniej więcej stały". W przyjętym przykładzie prędkość rośnie o 10 m/s w ciągu sekundy, czyli $a = 10$ (m/s)/s. Utrzymujemy zapis (m/s)/s, jako że s^2 nie ma interpretacji fizycznej.

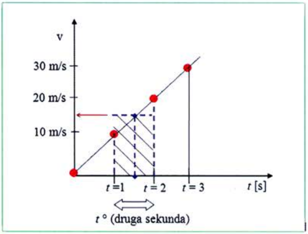
II. Poziom gimnazjalny

Sekwencja z równią, zdejmowaniem buta i obliczeniami dla ferrari to kilkanaście minut, a wynik nie przekracza aparatu matematycznego ucznia piątej klasy szkoły podstawowej. Dalszy krok wymaga aparatu pojęciowego gimnazjalisty. Jest to wykres $v(t)$. Zaznaczamy cztery punkty znalezione w naszym „doświadczeniu myślowym" ($t = 0$, $v = 0$), ($t = 1$, $v = 10$), ($t = 2$, $v = 20$), ($t = 3$, $v = 30$) i łączymy je linią prostą (rys. 1). Możemy powoli wyjaśnić, skąd się bierze ½. Potrzebny jest tylko wzór na pole trójkąta.

Rysujemy trójkąt prostokątny między punktami ($t = 0$, $v = 0$), ($t = 1$, $v = 10$), ($t = 1$, $v = 0$). Jego pole to podstawa ($\Delta t = 1$) przemnożona przez połowę wysokości ($v = 10$). Stąd pole:

$S(t = 1) = ½\, v(t = 1)\cdot\Delta t.$

Po raz pierwszy w obliczeniu drogi pojawia się czynnik ½. (W metodzie dogmatycznej, znacznie prostszej dla nauczyciela, powiedzielibyśmy: „Taki jest wykres prędkości od czasu, a droga przebyta to pole pod wykresem". Stwierdzenie jest poprawne fizycznie, ale dydaktycznie niezgodne z wymaganiami UE dotyczącymi *inquiry-based teaching*).



Rys. 1. Idea całkowania metodą trapezów (na poziomie gimnazjum, bez zdradzania samego pojęcia): krzywą przybliżamy za pomocą trapezu; pole pod krzywą w przedziale X (1,2) jest iloczynem średniej wartości Y na dwóch końcach przedziału i szerokości tego przedziału

Pole kolejnego fragmentu, czyli droga między $t = 1$ a $t = 2$ (zob. rys. 1), tym razem trapezu o podstawach b_1, czyli $v(t = 1)$, i b_2, czyli $v(t = 2)$, i wysokości $h = \Delta t$ wynosi:

$$S = ½(b_1 + b_2)\, h = ½ \cdot (10 + 20) \cdot 1 = 15 \cdot 1 = 15.$$

Stosujemy dla trapezu symbole jak na lekcji matematyki dla interdyscyplinarnego „usieciowania" wiedzy.

Kolejny krok dydaktyczny zapisuje w sposób analityczny „stałą pydę". Wyjaśniamy: „Jeżeli ferrari startuje od prędkości zerowej, to możemy zapisać, że po t sekundach jego prędkość wyniesie $v(t) = at$, prawda?". Sprawdzamy poprzednie zapiski i zauważamy, że po 3 s prędkość wyniosła 30 m/s.

Zdefiniowaliśmy w ten sposób ruch jednostajnie przyspieszony:

$$a = \Delta v/\Delta t = \text{const}. \qquad (1)$$

(Nazwa po polsku nieco niefortunna: dziś uczniowie nie rozróżniają przysłówków i przymiotników. Po włosku rozłączność pojęciowa z ruchem jednostajnym jest minimalnie większa: *moto uniforme*, *moto uniformemente accelerato*. Po angielsku nie używamy *uniform*, czyli mundur, ale raczej *constant velocity*, co jest pojęciowo bardziej bezpośrednie).

Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym obliczamy więc tak samo jak w przypadku ruchu jednostajnego: mnożymy prędkość przez interwał czasu, ale użytą prędkością jest prędkość średnia w danym odcinku czasu.

Wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym (na razie bez podawania dodatkowych założeń) wynosi $s = ½\,(at)\cdot t$, gdzie $½\,(at)$ jest średnią prędkością między prędkością zerową w momencie startu a prędkością $v(t) = at$ po upływie czasu t.

Wykres na rys. 1 daje nam również receptę na uogólnienie wzoru $s = ½\,at^2$. Widzimy więc, że na wykresie v w funkcji t przebyta droga jest równa polu pod wykresem $v(t)$. Jeżeli w chwili początkowej samochód miał prędkość początkową v_0, to do wzoru na przebytą drogę należy dodać pole prostokąta $v_0\, t$ (sporządzenie odpowiedniego rysunku pozostawiam czytelnikowi). Jeżeli dodatkowo liczymy drogę od jakiegoś innego punktu początkowego, należy dodać jeszcze tę drogę początkową s_0.

Wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym ma więc postać:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + ½\, at^2. \qquad (2)$$

W ujęciu konstruktywistycznym, zasadniczo z wykorzystaniem jedynie wiedzy uczniów, odtwarzamy wzór stanowiący problem Karoliny.

III. Rachunek całkowy

Wzór (2) zawiera dwie stałe: v_0 i s_0. Czyżby przypadkowo? Kolejny fragment wymaga poziomu licealnego, ba, uniwersyteckiego!

W polskiej dydaktyce słabo rozróżniane są wzory (1) i (2). Na oba zwykło się mówić „wzór na ruch jednostajnie przyspieszony". W dydaktyce włoskiej, dziedziczce Galileusza, istnieje ścisłe rozgraniczenie między wzorami (1) i (2). Wzór na „ruch jednostajnie przyspieszony" to $a = \text{const}$ jako definicja tego ruchu. Mało tego, $\mathbf{a} = \mathbf{const}$, gdzie przez wytłuszczenie zaznaczamy wektory. Wzór $s = s_0 + \ldots$ to „zależność czasowa w ruchu jednostajnie przyspieszonym" (*legge oraria*). Rozróżnienie bynajmniej nie tylko formalne, ale i operacyjne.

Wzór $a = \text{const}$ natychmiast wyjaśnia, skąd się biorą stałe s_0 i v_0. Są to po prostu dwie stałe z kolejnych całkowań równania różniczkowego.

Z definicji przyspieszenia mamy:

$$a(t) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t, \qquad (3)$$

czyli zachodzi związek:

$$\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{d\,v(t)}{d\,t}\,dt = v(t) \qquad (4)$$

(gdzie nadwyrężamy nieco matematyczną precyzję zapisu „podstawowego twierdzenia rachunku całkowego").

Mamy więc z definicji ruchu jednostajnie przyspieszonego $a(t) = \text{const} = a$ (znów tu nadwyrężamy precyzję symboli):

$$v(t) = \int a\cdot \mathrm{d}t = at + v_0, \qquad (5)$$

gdzie v_0 jest stałą całkowania, zdefiniowaną przez warunek $v(t = 0) = v_0$.

Podobnie z definicji prędkości chwilowej $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ mamy:

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0, \qquad (6)$$

gdzie ponownie stała całkowania s_0 jest zdefiniowana przez warunek $s(t = 0) = s_0$.

Innymi słowy, droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym jako druga całka przyspieszenia po czasie, musi zawierać dwie stałe całkowania.

Zagadkowy czynnik ½ bierze się z faktu, że $\int x\, dx = ½\, x^2$. Jasne, Karolino?

Pozostaje jednak do wyjaśnienia, jak nasza historyjka o ferrari ma się do rachunku całkowego. Jest to wiedza z informatyki, która przekracza bagaż umiejętności przeciętnego studenta, tym bardziej wymaga wyjaśnienia.

IV. Całkowanie metodą trapezów

W dyskusji o ferrari podzieliliśmy odcinek czasu 3 s na mniejsze interwały. W każdym interwale policzyliśmy prędkość średnią jako średnią z dwóch podstaw trapezu prostokątnego. Drogę wyliczyliśmy jako sumę pól tych trapezów.

Wiemy, że na wykresie $v(t)$ pole pod krzywą jest przebytą drogą. Ogólnie jednak wykres $v(t)$ nie musi być linią prostą. Naszą receptę zastąpienia drogi w każdym małym przedziale czasowym (t_i, t_{i+1}) iloczynem Δt oraz prędkości średniej między v_i a v_{i+1} nazywamy całkowaniem numerycznym metodą trapezów.

W szczególnym przypadku ruchu jednostajnie przyspieszonego, kiedy wykres $v(t)$ jest linią prostą, metoda trapezów daje wynik dokładny, niezależnie od wybranego przedziału (t_i, t_{i+1}), również wtedy, gdy $v_0 \neq 0$.

V. Arytmetyka i dydaktyka

Nadal nie wiemy jednak, jak połączyć doświadczenie z butem (i np. spadającymi pionowo kulkami na sznurku umieszczonymi w odpowiednich odległościach, licząc od dołu, 1 : 3 : 5 itd.) ze wzorem $s = ½\, at^2$. To przypadłość arytmetyki.

Rozważania Galileusza z jego oryginalnej pracy mówią o „kolejnych odcinkach czasu". Matematycznie zapisalibyśmy to jako odcinki numerowane liczbami n i $n + 1$. Różnica dróg $\Delta s_{n+1,n}$ wynosi:

$$\Delta s = s(n+1) - s(n) = ½\, a\, [(n+1)^2 - n^2] = = ½\, a\, (2n+1), \qquad (7)$$

a $(2n + 1)$ jest zawsze liczbą nieparzystą.

Dydaktycznie więc spostrzeżenie Galileusza, syna lutnika (stąd zainteresowanie regularnością liczbową), niewiele nam mówi o zależności czasowej $s(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Ot! Ciekawostka matematyczna, ale ułatwiająca skupienie uwagi ucznia na problemie.

Czy Galileusz spuszczał kamienie z Krzywej Wieży w Pizie? Historycy twierdzą, że nie. Ale był tam profesorem, wieża zaczęła się chylić już w trakcie budowy w XII wieku (wyprostował ją dopiero Polak, prof. Jamiołkowski z politechniki w Turynie [5]). Nic więc nie stało na przeszkodzie, aby Galileusz, korzystając z równo ustawionej metryki poszczególnych kondygnacji, obserwował z ziemi, jak spuszczony kamień przyspiesza. Genialnie oddał to projektant repliki wieży w Science Museum w Daejeon (Korea Południowa).

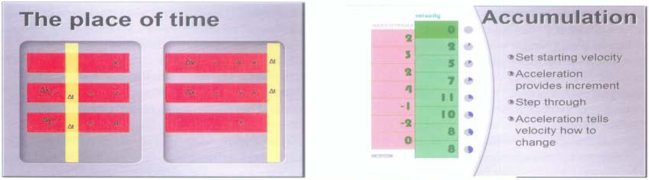
Równia pochyła natomiast to taka grawitacja „rozcieńczona" sinusem kąta nachylenia równi do poziomu, łatwiejsza do zmierzenia. Jak napisał w 1961 roku w znakomitej książce *Fizyka dla dociekliwych* E.M. Rogers: „Fizyka zeszła z nieba na ziemię po równi pochyłej Galileusza". Jak równia jest pionowo, to przyspieszenie wynosi g, jak poziomo – zero.

Podsumujmy istotne elementy ścieżki poznawczej na poziomie gimnazjalnym:

- definicja przyspieszenia jako przyrostu prędkości w interwale czasu $a = \Delta v/\Delta t$;

a) b) c)

Fot. 3: a) Krzywa Wieża w Pizie w 2000 roku przed jej prostowaniem; b) wieżę prostował Polak, prof. Jamiołkowski [5] (obwiązano ją linami, z jednej strony obciążono fundament blokami z ołowiu, po czym powoli wypłukiwano glinę spod fundamentu; teraz już nie grozi przewróceniem się); c) replika Krzywej Wieży w Science Museum w Daejeon w Korei Południowej, oddająca ideę spadku swobodnego (fot. M. Karwasz)



Rys. 2. „Przyspieszenie jeszcze raz zapisane" – dwa kolejne obrazy z prezentacji dr. Iana Lawrence'a z Uniwersytetu w Birmingham przygotowanej na konferencję GIREP 2007 [6]: a) ujęcie tradycyjne (lewy słupek) definiuje prędkość jako pochodną drogi, a przyspieszenie jako pochodną prędkości, ujęcie proponowane przez I. Lawrence'a (i obecne) traktuje prędkość jako całkę przyspieszenia (tj. iloczyn przyspieszenia i przedziału czasu); a drogę jako całkę prędkości; b) prędkość w każdym kolejnym momencie obliczamy, całkując przyspieszenie w interwałach czasu. (Materiał wykorzystany za zgodą autora)

- umiejętność oszacowania prędkości średniej w interwale czasu;
- definicja przebytej drogi jako iloczynu prędkości (średniej, odpowiednio wyliczonej) i czasu $s = v_{śr}\, t$.

A dodatkowo na poziomie licealnym:

- interpretacja drogi jako pola pod wykresem $v(t)$.

Zauważmy, że ujęcie takie zmienia typową sekwencję dydaktyczną, w której definiujemy prędkość jako pochodną drogi po czasie, a następnie przyspieszenie jako pochodną prędkości. Nie jest to ani matematycznie, ani interpretacyjnie proste. Obecna propozycja wychodzi od prędkości jako wielkości bezpośrednio mierzalnej: „Prędkość to wielkość, którą odczytujesz na wskazówce w samochodzie". Droga zaś jest całką prędkości po czasie: „Droga przebyta zależy od tego, jak długo i z jaką prędkością maszerowałeś". Podobne ujęcie pojawia się we współczesnej dydaktyce [6] w Anglii, ojczyźnie Newtona (rys. 2).

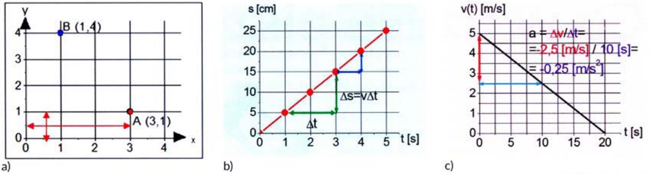
VI. Galileusz i metoda naukowa

Najistotniejsza w obserwacji Galileusza była niezależność „prędkości" spadku od masy ciał. W swoich pracach opisuje to za pomocą „doświadczenia myślowego" – dwóch kamieni (ciężkiego i lekkiego) związanych sznurkiem. Galileusz ustalił paradygmat nowoczesnej fizyki: nie przypadkowa obserwacja, ale celowo przeprowadzony, modelowy eksperyment, w którym zaniedbujemy większość zmiennych, a szukamy jednej tylko zależności. Komputerowy pomiar (i model matematyczny) odbicia się kauczukowej piłeczki od podłoża pokazuje, że dla opisu zjawiska oprócz przyspieszenia ziemskiego i oporu powietrza trzeba uwzględnić współczynnik sprężystości piłki, podłoża, lepkość dynamiczną kauczuku, czas zderzenia itd. Kinematyka jako pierwszy dział fizyki jest znakomitym przykładem galileuszowej abstrakcji od zmiennych drugorzędnych.

Niezależność czasu spadania od masy pokazujemy za pomocą piłki kauczukowej i pingpongowej, spuszczonych z wysokości 60–70 cm. Uczniowie zamykają oczy, nie widzą koloru, trajektorii itd., a jedynie słyszą moment odbicia. Jeden uczeń kontroluje wizualnie, czy nauczyciel nie oszukuje. Młodzież otwiera oczy. Następnie zadajemy kłam doświadczeniu, spuszczając piłeczki z wysokości 2 m – istnieje opór powietrza. Tylko na Księżycu wszystkie ciała spadają z tą samą „prędkością".

a) b)

Fot. 4. Zabawkowe zjeżdżalnie [7] wyzwalają naturalną ciekawość badawczą, a przy tym są znakomitymi eksponatami dydaktycznymi: a) ani lżejszy samochodzik nie dogoni cięższego, ani cięższy lżejszego (G. Karwasz, „W czasie deszczu dzieci się nudzą", wystawa na molo w Sopocie, sierpień 2004); b) w staczaniu się krążków o różnym momencie bezwładności ten bardziej „zwarty" dogoni ten „rozciągnięty" (G. Karwasz, „Z górki na pazurki", UMK, kwiecień 2007). Fot. M. Karwasz i K. Służewski



Rys. 3: a) Nauczanie konstruktywistyczne, jak w „Feynmana wykładach z fizyki", musi zawierać od początku wszystkie niezbędne elementy, począwszy od definicji układu współrzędnych; nauczanie przyjazne musi uczniowi ułatwiać zrozumienie – różne typy wykresów mają różne kolory tła; b) ruch pęcherzyka powietrza w pochylonej rurce z olejem; c) ruch kamienia w zawodach curlingu na lodzie. Przykłady z „Toruńskiego poręcznika" [9]

Dysponując równią z samochodzikami (fot. 4), możemy jeden z nich dodatkowo obciążyć, a następnie zorganizować zawody: czy cięższy dogoni lżejszy? W zabawie z dziećmi jedna osoba sprawdza (z zamkniętymi oczyma), który samochodzik jest cięższy. Przed eksperymentem głosujemy, czy lżejszy dogoni cięższy, czy może na odwrót. Ruch samochodzików zawracających na końcu równi jest skomplikowany, ale doświadczenie „wychodzi" niezawodnie. Z kolei głosowanie nad hipotezą roboczą wciąga uczniów emocjonalnie. Uwaga: ruch na takiej zjeżdżalni jest przyspieszony tylko na poszczególnych „równiach". W momencie zawracania wózki zwalniają (zob. materiały filmowe [7]).

VII. *Pedagogical content knowledge*

Podstawą współczesnej dydaktyki jest kojarzenie wymagań pedagogicznych z treściami fizycznymi, *pedagogical content knowledge* (PCK), jak w powyższym tytule (zob. np. [8]).

Nauczanie to „rzeźbienie w żywym marmurze". Ważniejsze może się okazać kształtowanie przyjaznego wizerunku fizyki niż umiejętność całkowania metodą trapezów. Dlatego należy być wyrozumiałym, a nie „karać" niezrozumiałymi wykresami. W eksperymentalnym *Toruńskim poręczniku do fizyki* [9] zależności prędkości od czasu przedstawiamy konsekwentnie na innym tle niż wykresy drogi od czasu (rys. 3). Ot, mała rzecz, ale jak pokazują badania [10], ułatwia uczniom zrozumienie tematu, a nauczyciela fizyki uwalnia od meandrów rachunku różniczkowego i geometrii analitycznej.

Istotne kompetencje społeczne z interaktywnej lekcji o równi Galileusza to:
podział ról;

- konstruktywistyczna sekwencja odpowiedzi, choćby błędnych;
- umiejętność pomiaru za pomocą miar antropomorficznych (buta);
- skrupulatność dokumentacji pomiaru fizycznego.

Pierwszy filar przedstawionej metodologii nazywamy hiperkonstruktywizmem [2], jako że wychodzi on poza rozumienie konstruktywizmu jako społecznego uzgadniania rzeczywistości [11]. Fizykę uzgadniamy z uczniami, pozornie wyłącznie w oparciu o ich wiedzę, a w rzeczywistości wciągając ich przez *inquiry-based teaching* na jednoznaczną ścieżkę docelową: $\frac{1}{2}\,at^2$. Drugi filar to neorealizm, w którym eksponatem doświadczalnym są wyjęte z kieszeni piłeczki, szklana kulka stukocząca na pochyłym stole (której to ruchu uczniowie słuchają z zamkniętymi oczyma) i film dotyczący swobodnego spadku na Księżycu [12].

PS. Pokazy z mechaniki *Z górki na pazurki* można zamówić, wysyłając e-mail na adres: akarb@fizyka.umk.pl.

prof. Grzegorz Karwasz

Ponad 10 lat wykładał fizykę na uniwersytetach we Włoszech, pracował naukowo w USA, Berlinie, Australii, Korei. Od 2006 roku kieruje Zakładem Dydaktyki Fizyki na Wydziale Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

LITERATURA

[1] Reńda W., *Ratujmy kinematykę!*, „Fizyka w Szkole" 2015, nr 4, s. 24–26.
[2] Karwasz G., *Między neorealizmem a hyperkonstruktywizmem – strategie dydaktyczne dla XXI wieku*, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2011, nr 3, s. 8–30, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Pliki/PWE_GK_small.pdf [dostęp: 5.04.2016].
[3] Galilei G., *Dialogo dei massimi sistemi*, Grandi Classici Oscar Mondadori, Milano 1996, s. 231–232.
[4] Doświadczenie z równią Galileusza, Zakład Dydaktyki Fizyki UMK, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/nowa_strona/?q=node/485 [dostęp: 5.04.2016].
[5] Karwasz G., *Jak prostowano Krzywą Wieżę*, „Głos Koszaliński/Głos Słupski", 4–5 sierpnia 2001, www.fizyka.umk.pl/~karwasz/publikacje/2001_Wieza.pdf [dostęp: 5.04.2016].
[6] Lawrence I., *Re-ordering kinematics through simple computer-mediated tools* [w:] *Book of Abstract*, GIREP-EPEC Conference Proceedings „Frontiers of Physics Education", 26–31 August 2007, Opatija, s. 100.
[7] Karwasz G. i in., *Fizyka i zabawki* [CD-ROM], Pomorska Akademia Pedagogiczna, Słupsk 2004, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/zabawki/files/mech/zjezdzalnia.html, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/zabawki/files/mech/bigdown.html [dostęp: 5.04.2016].
[8] Karwasz G., *Doktoraty dla nauczycieli*, „Postępy Fizyki" 2012, nr 6, s. 236, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Publikacje_2013/GK_Doktoraty.pdf [dostęp: 5.04.2016].
[9] Karwasz G., Sadowska M., Rochowicz K., *Toruński poręcznik do fizyki. Mechanika. Gimnazjum I klasa*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2010.
[10] Sadowska M., Wyborska K., *Konstruktywizm w praktyce szkolnej – „Toruński poręcznik do fizyki"* [w:] *Problemy dydaktyki fizyki*, pod red. A. Krajny, L. Ryka, K. Sujak-Lesz, Czeszów–Wrocław 2013, s. 225–236.
[11] Karwasz G., *Postkonstruktywizm a korzenie kulturowe Europy*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici: Pedagogika" 2011, Vol. 26, z. 401, s. 75–82, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Publikacje_2011/Pedagogika_2011.pdf [dostęp: 5.04.2016].
[12] Apollo 15, *Galileo's experiment*, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Apollo/apollo15-galileo.mp4 [dostęp: 5.04.2016].

FIZYKA
w Szkole z Astronomią

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI

Nr 3 maj/czerwiec 2016 CENA 17,50

ASTRONOMIA:

Komety
– między wiarą a nauką

Galaktyki
– jaki kształt ma Droga Mleczna?

Rozwój fizyki
– poszukiwanie teorii ostatecznej, teorii wszystkiego

Parki ciemnego nieba
– sposób na zanieczyszczenia świetlne

Skąd się bierze ½ we wzorze at^2?

Naturalny reaktor w Oklo
– historia odkrycia i zadania z fizyki jądrowej